目　　录

第一章　电子-正电子场的量子化

第二章　对外场的响应：电荷重正化

第三章　自由场的量子化：自旋为0和$\frac{1}{2}$的量子电动力学

第四章 相互作用场：相互作用表象和S矩阵

第五章 海森伯表象：S矩阵和电荷重正化

第六章 S矩阵：应用

第七章 量子电动力学的费因曼方法

第一章　电子-正电子场的量子化

§1. 海森伯表象和相互作用表象[A－1][①]

只要期待值保持正确的时间相关性:

$$\langle A\rangle=\sum_{nm}(\Psi_n^*A_{nm}\Psi_m),\qquad[1.1]$$

我们就能够完全任意地选择算符和本征函数对时间的相关性.

1. 海森伯表象

状态矢Ψ与时间无关，A满足有相互作用的场方程式. 例如，对于电磁势，$A\rightarrow\Phi_\mu$,

$$\Box\Phi_\mu=-j^\mu.\qquad[1.2]$$

2. 相互作用表象

这里Ψ与时间有关，而且使得与时间有关的A满足无相互作用的场方程式. 例如,

$$\Box\Phi_\mu=0.\qquad[1.3]$$

当无相互作用时，这两种表象是相同的. 例如，若相互作用是:

$$H=-j^\mu\Phi_\mu,\quad j^\mu\propto e,\quad e\ll1,$$

可以展开

$$\Psi=\Psi_0+e\Psi_1+\cdots,$$

其中Ψ_0与时间无关，$\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3,\cdots$与时间有关.

注: 1. 所有这些对普通量子力学是正确的，对量子场论也是正确的.

2. 如果总能量是对角的，则在海森伯表象中

① [A－1]－[A－8]见附录

$$A_{nm}(t)=A_{nm}(0)\cdot\exp[i(E_n-E_m)t],$$

且Ψ与时间无关.

3. 薛定谔表象

这里选择A与时间无关,而相应地,

$$\Psi_n(t)=\Psi(0)\cdot\exp[iE_nt], \qquad [1.4]$$

(若总能量是对角的).

§2. 谐振子的量子化

哈密顿量是

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{p'^2}{m}+m\omega^2q'^2\right).$$

令

$$\frac{p'}{\sqrt{m}}=p, \qquad q'\cdot\sqrt{m}=q$$

(正则变换;p, q 是厄密量). 则,

$$H=\frac{1}{2}(p^2+\omega^2q^2), \qquad [2.1]$$

$$i[p,q]=1. \qquad [2.2]$$

我们引入

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(p-i\omega q)\\ a^*&=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(p+i\omega q)\end{aligned}\right\}, \qquad [2.3]$$

所以

$$[a,a^*]=1. \qquad [2.4]$$

于是

$$H=\frac{\omega}{2}(aa^*+a^*a)=\omega\left(a^*a+\frac{1}{2}[a,a^*]\right). \qquad [2.5]$$

$\frac{1}{2}[a, a^*]=\frac{1}{2}$这一项是零点能．量 a^*a 有整数本征值：

$$a^*a=N \qquad (N=0, 1, 2, \cdots), \tag{2.6}$$

这是从 p、q 的厄密性要求得出的．在N为对角的矩阵表象中

$$\left.\begin{aligned}
a&=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\
a^*&=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\
N&=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\}. \tag{2.7}$$

令Ψ是变数N的函数：$\Psi=\Psi(N)$，则 a 的意义如下：

$$\left.\begin{aligned}
&a^* \text{ 是产生(发射)算符，因为} \\
&\qquad a^*\Psi(N)=\sqrt{N+1}\,\Psi(N+1); \\
&a \text{ 是湮没(吸收)算符，因为} \\
&\qquad a\Psi(N)=\sqrt{N}\,\Psi(N-1).
\end{aligned}\right\}. \tag{2.8}$$

最低能量状态是 $N=0$ 态，所谓“真空”．则

$$\left.\begin{array}{ll} a^*\Psi(0)=\Psi(1), & a\Psi(0)=0 \\ \langle a^*a\rangle_0=0, & \langle aa^*\rangle_0=1 \end{array}\right\}. \qquad [2.9]$$

这里占有数N是任意的；因此这种量子化对应玻色-爱因斯坦统计．对于费密统计存在相应的关系（满足不相容原理）．

如果我们在形式上引入

$$\left.\begin{array}{l} \{a, a^*\}\equiv aa^*+a^*a=1, \\ a^2=0, \quad a^{*2}=0, \end{array}\right\} \qquad [2.10]$$

则得到解：

$$a=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad [2.11]$$

而且，若令

$$N\equiv a^*a=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad [2.12]$$

则

$$1-N=aa^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N(1-N)=0 \qquad [2.13]$$

这正好对应不相容原理．应该指出，与玻色-爱因斯坦统计不同，在费密统计中，a 与 a^* 之间以及N与 $1-N$ 之间都分别完全对称．

§3. 自旋等于$\frac{1}{2}$的粒子的二次量子化

a. 自旋等于零的粒子的非相对论表述

我们用本征函数的全集展开：

$$\psi(x, t)=\sum_r a_r \exp[i(\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{x}_r-k_r^0 t)], \qquad [3.1]$$

而且要求不同模式的振幅对易，并要求每种模式的行为类似谐

振子:

$$[a_r, a_s]=[a_r^*, a_s^*]=0; \quad [a_r, a_s^*]=\delta_{rs}. \qquad [3.2]$$

如果我们想象整个系统封闭在各边长为L的盒G中,则

$$k_r^i=\frac{2\pi}{L}s^i, \qquad i=1,2,3, \qquad \text{其中 } s^i \text{ 是整数} \qquad [3.3]$$

如果系统不封闭在上述盒中,则可以要求周期性边界条件:

$$\psi(x^1+L, x^2, x^3; t)=\gamma\cdot\psi(x^1, x^2, x^3; t); \quad |\gamma|^2=1. \qquad [3.4]$$

而结果相同. 完全性关系要求:

$$\int_G \psi^*\psi \mathrm{d}^3x=\sum_r a_r^* a_r=\sum_r N_r. \qquad [3.5]$$

b. 相对论表述

这里出现特有的复杂化, 其原因在于所有简单场方程式都既包含负频率的解,又包含正频率的解.

让我们具体地考虑狄拉克方程:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2\delta_{\mu\nu}, \qquad [3.6]$$

$$\left(\gamma^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}+m\right)\psi=0. \qquad [3.7]$$

正如大家所熟知的,这方程也导致具有正频率和负频率的解.

我们用本征函数的全集将ψ展开:

$$\psi_\rho=\sum_r A_r u_\rho^{(r)}(x), \qquad [3.8]$$

其中x是四维矢量($x^0=t$, $x^4=it$),且按下式

$$\int\sum_\rho u_\rho^{*(r)}u_\rho^{(s)}\mathrm{d}^3x=\delta_{rs} \qquad [3.9]$$

对$u_\rho^{(r)}$归一化. 这是可能的, 因为从方程[3.7]得出的电流守恒定律保证方程[3.9]中的积分不随时间而变. 证明如下: 考虑伴随方程(其中箭号表示微分作用在左边),

$$\bar{\psi}\left(\gamma^{\nu}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\nu}}-m\right)=0, \qquad [3.10]$$

用 $\bar{\psi}$ 乘[3.7]和[3.10]乘 ψ，相加，得：

$$\bar{\psi}\left(\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}+m\right)\psi+\bar{\psi}\left(\gamma^{\nu}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\nu}}-m\right)\psi=0.$$

于是我们得到

$$\frac{\partial j^{\nu}}{\partial x^{\nu}}=0, \qquad [3.11]$$

其中(有任意常数 C)

$$j^{\nu}=C\cdot\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi. \qquad [3.12]$$

由此得出

$$\frac{\partial}{\partial t}\int j^{0}\mathrm{d}^{3}x=0.$$

证毕。

关于伴随方程应注意的是：γ^{ν} 必须是厄密量；即，

$$\gamma^{\nu *}=\gamma^{\nu T},\quad (\gamma^{\nu T})_{\alpha\beta}\equiv(\gamma^{\nu})_{\beta\alpha}. \qquad [3.13]$$

这里，γ^{ν} 的厄密性在具有虚时坐标的 x^1, x^2, x^3, x^4 中将是正确的。因为四个坐标不全是实数，当建立方程[3.7]的复数共轭时，具有 x^4 的项的符号必须改变：

$$-\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x^{4}}\gamma^{4}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x^{k}}\gamma^{k}+m\psi^{*}=0. \qquad [3.14]$$

如果用 γ^4 从右边乘方程[3.14]，则因 $\gamma^4\gamma^k=-\gamma^k\gamma^4$，且

$$\psi^{*}\gamma^{4}\equiv\bar{\psi}, \qquad [3.15]$$

于是由[3.14]得：

$$\bar{\psi}\left(\gamma^{\nu}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\nu}}-m\right)=0.$$

而且

$$j^4 = C(\bar{\psi}\gamma^4\psi) = C(\psi^*\psi) = ij^0.$$

因为 j^0 必定是电荷密度，所以取 $C = ie$，这样，

$$j^\nu = ie(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi). \qquad [3.16]$$

现在我们对振幅进行量子化，凭实验确知电子满足不相容原理(这也有理论根据①)，所以我们将按照 § 2 末所给出的图式进行量子化. 这个方案(由约旦和维格纳提出②)是非常有用的，虽然它的物理意义看来似乎是模糊的：振幅表达式的符号取决于简正模的计数.

为此按下列展开：

$$\left.\begin{aligned} \psi_\rho &= \sum_r A_r u_\rho^{(r)}(x) \\ \psi_\rho^* &= \sum_r A_r^+ u_\rho^{(r)*}(x) \\ \bar{\psi}_\rho &= \sum_r A_r^+ \bar{u}_\rho^{(r)}(x) \end{aligned}\right\}, \qquad [3.17]$$

而且为了量子化，要求

$$\left.\begin{aligned} \{A_r, A_s^+\} &\equiv A_r A_s^+ + A_s^+ A_r = \delta_{rs} \\ \{A_r, A_s\} &= \{A_r^+, A_s^+\} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad [3.18]$$

因为体系的完全性，

$$\int j^0 \mathrm{d}^3 x = e \sum_r A_r^+ A_r. \qquad [3.19]$$

如果我们把 $A_r^+ A_r$ 解释为在状态 $u^{(r)}$ 中的粒子数 N_r，则 $\int j^0 \mathrm{d}^3 x / e$ 始终是正的，因此我们得到一个只有正粒子数的理论. 将状态分为具有正频率的状态和具有负频率的状态，我们也能建立

① W. PAULI, *Rev. Mod. Phys.* **13**, 203(1941).

② P. JORDAN and E. P. WIGNER, *Z. Physik* **45**, 751(1928).

一个描述电子和正电子的理论(见§4).

首先我们推广完全性关系式. 在非相对论形式中, 此关系式是:

$$\sum_r u_\alpha^{(r)}(\boldsymbol{x}, t) u_\beta^{(r)*}(\boldsymbol{x}', t) = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \qquad [3.20]$$

但是我们能够不作等时假设, 若令$(\boldsymbol{x}, t)\equiv x$, 且以$\gamma^4$乘[3.20], 则得:

$$\sum_r u_\alpha^{(r)}(x)\bar{u}_\beta^{(r)}(x') = -iS_{\alpha\beta}(x-x'). \qquad [3.21]$$

这里S由下列性质确定:

$$S_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', 0) = i(\gamma^4)_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \qquad [3.22]$$

$$\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}+m\right)S=0, \qquad S\left(\gamma\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x'}-m\right)=0. \qquad [3.23]$$

就是说, S是狄拉克方程的解, 当$t=0$时, S成为$i\gamma^4\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$, 因为狄拉克方程是一阶的, 所以这足够唯一确定$S$. 确定$S$可简化为解二阶微分方程. 因为

$$\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}+m\right)\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}-m\right)\equiv\Box-m^2,$$

如果$\Delta(x)$定义为

$$\left.\begin{aligned} &(\Box-m^2)\Delta(x)=0 \\ &\Delta(\boldsymbol{x}, 0)=0 \\ &\left(\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{x}, 0}=-\delta^3(\boldsymbol{x}) \end{aligned}\right\}, \qquad [3.24]$$

则

$$S(x)=\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}-m\right)\Delta(x). \qquad [3.25]$$

从方程[3.21]定义的$S(x)$, 并根据方程[3.17]和[3.18], 立即得到:

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = -iS_{\alpha\beta}(x-x'). \qquad [3.26]$$

§4. 能量的正负;空穴理论

$$E_{rr} = i\int u^{(r)*}\frac{\partial u^{(r)}}{\partial t}\mathrm{d}^3x \qquad [4.1]$$

是时间上的常量,其原因恰好和电荷的原因相同,这就是说,

$$E_{rs} = -\int \bar{u}^{(r)}\gamma^4\frac{\partial u^{(s)}}{\partial x^4}\mathrm{d}^3x = \int \bar{u}^{(r)}\left(\boldsymbol{\gamma}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}+m\right)u^{(s)}\mathrm{d}^3x,$$

它的对角元素是常量.我们选择 $u^{(r)}$ 使 E_{rs} 是对角的:

$$E_{rs} = \delta_{rs}\cdot\omega_r\cdot\varepsilon_r;\quad \omega_r>0,\quad \varepsilon_r=\pm 1 \qquad [4.2]$$

对于每一个 $\varepsilon_r>0$ 的解,都存在一个 $\varepsilon_r<0$ 的解,ε_r 将状态按正,负能量分类.例如,对于平面波,

$$\varepsilon_r=+1:\qquad u^{(r)} = C^{(r)}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\exp[i(\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{x}-\omega_r t)],$$

$$\varepsilon_r=-1:\qquad u^{(r)} = C^{(r)}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\exp[i(\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{x}+\omega_r t)].$$

一般地说,任何依赖于时间的正规函数 $\psi(t)$(在无限远处充分快地变为零),都能用傅里叶分解分成一正频率部分和一负频率部分.这也可以不用傅里叶分解,而用下述方法完成.我们定义:

$$\left.\begin{aligned}\psi^+(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_+}\psi(t-\varepsilon\tau)\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\\ \psi^-(t) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-}\psi(t-\varepsilon\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\end{aligned}\right\}(\varepsilon>0). \qquad [4.3]$$

其根据如下:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+}\exp[-i\omega(t-\varepsilon\tau)]\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}$$

$$=\frac{\exp[-i\omega t]}{2\pi i}$$

$$\int_{C_+}\exp[i\omega\varepsilon\tau]\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau},$$

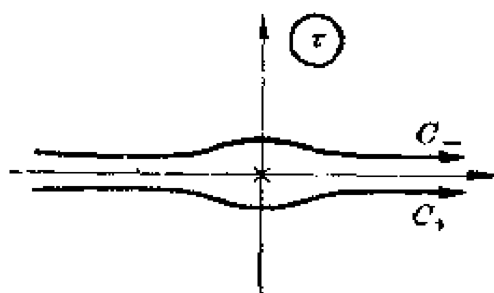


图 4.1

利用留数求值，得：
当 $\omega>0$ 时，路线必须在上半平面闭合，以保证

$\exp[i\omega\varepsilon\tau]$对大的$\tau$保持有界；

当 $\omega<0$ 时，路线必须在下半平面闭合。
这样求得：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+}\exp[-i\omega(t-\varepsilon\tau)]\frac{d\tau}{\tau}=\begin{cases}\exp[-i\omega t] & (\omega>0)\\ 0 & (\omega<0).\end{cases}$$

于是

$$\psi^+(t)+\psi^-(t)=\psi(t). \qquad [4.4]$$

此外

$$i(\psi^+(t)-\psi^-(t))\equiv\psi^1(t)=\frac{1}{\pi}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t-\varepsilon\tau)\frac{d\tau}{\tau}, \qquad [4.5]$$

其中$\mathscr{P}$是定义在实轴上的主值，

$$\mathscr{P}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}f(t)dt+\int_{+\varepsilon}^{+\infty}f(t)dt\right], \qquad [4.6]$$

于是

$$\left.\begin{aligned}\psi^+&=\frac{1}{2}(\psi-i\psi^1)\\ \psi^-&=\frac{1}{2}(\psi+i\psi^1)\end{aligned}\right\}. \qquad [4.7]$$

相应地，我们能够作下列分离：

$$\Delta=\Delta^++\Delta^-, \qquad \Delta^\pm=\frac{1}{2}(\Delta\mp i\Delta^1); \qquad [4.8]$$

$$S=S^++S^-, \qquad S^\pm=\frac{1}{2}(S\mp iS^1). \qquad [4.9]$$

若令

$$\left.\begin{aligned}A_r^*A_r&=N_r\\ A_rA_r^*&=1-N_r\end{aligned}\right\}(\varepsilon_r>0), \quad \left.\begin{aligned}A_rA_r^*&=N_r\\ A_r^*A_r&=1-N_r\end{aligned}\right\}(\varepsilon_r<0); \qquad [4.10]$$

即

$$\left.\begin{array}{l}\langle A_r^* A_r\rangle_0=0,\ \langle A_r A_r^*\rangle_0=1,\ (\varepsilon_r>0)\\ \langle A_r^* A_r\rangle_0=1,\ \langle A_r A_r^*\rangle_0=0,\ (\varepsilon_r<0)\end{array}\right\},\qquad [4.11]$$

则空穴理论关于正的和负的带电粒子是对称的. 这里$\langle\ \rangle_0$表示真空期待值，它被定义为最低能态. 这样定义下的状态，确实是真空，可说明如下：若用E表示能量，则

$$E=i\int \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\mathrm{d}^3x=\sum_r\omega_r\varepsilon_r A_r^* A_r$$

$$=\sum_{r,\varepsilon_r>0}\omega_r N_r+\sum_{r,\varepsilon_r<0}\omega_r N_r-\sum_{r,\varepsilon_r<0}\omega_r.$$

因此

$$E=\sum_r\omega_r N_r-\sum_{r,\varepsilon_r<0}\omega_r.\qquad [4.12]$$

第二项是(发散的)常量. 能量的最小值出现在$N_r=0$，即最低能态和无粒子态是相同的.

用方程[4.11]容易求得：

$$\left.\begin{array}{l}\langle\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(x')\rangle_0=-iS^+_{\alpha\beta}(x-x')=\dfrac{1}{2}(-iS-S^1)_{\alpha\beta}\\ \langle\bar\psi_\beta(x')\psi_\alpha(x)\rangle_0=-iS^-_{\alpha\beta}(x-x')=\dfrac{1}{2}(S^1-iS)_{\alpha\beta}\end{array}\right\}\qquad [4.13]$$

由此得：

$$\langle[\psi_\alpha(x),\bar\psi_\beta(x')]\rangle_0=-S^1_{\alpha\beta}(x-x').\qquad [4.14]$$

§5. 不变函数的构造

到目前为止，函数Δ、Δ^1等还没有明确地定义过，本节将明显地建立这些函数. 我们有

$$\Delta(x,t)=-\frac{i}{2\cdot(2\pi)^3}\int(\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)]$$

$$-\exp[-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)])\frac{\mathrm{d}^3k}{\omega},\qquad [5.1]$$

其中 $\omega=+\sqrt{m^2+k^2}$.

证明:

$$\Delta(x)=-\Delta(-x),\qquad (x)\equiv(\boldsymbol{x},t),$$
$$\Delta(\boldsymbol{x},t)=+\Delta(-\boldsymbol{x},t),$$
$$\Delta(\boldsymbol{x},t)=-\Delta(\boldsymbol{x},-t).$$

于是,

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}=-\frac{i}{2\cdot(2\pi)^3}\int(-i\omega)(\exp[i(kx)]+\exp[-i(kx)])\frac{\mathrm{d}^3k}{\omega},$$

$$(kx)\equiv\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t,$$

$$\left.\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\cdot2\int\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]\mathrm{d}^3k=-\delta^3(\boldsymbol{x}).$$

因此, Δ 具有其全部所需性质, 它还可表示成其它形式:

$$\Delta(\boldsymbol{x},t)=-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]\sin\omega t\,\frac{\mathrm{d}^3k}{\omega}\qquad[5.2]$$

和

$$\Delta(x)=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int\exp[i(kx)]\varepsilon(k)\delta(k^2+m^2)\mathrm{d}^4k,$$
$$k^2\equiv(kk),\qquad[5.3]$$

其中

$$\varepsilon(k)=\begin{cases}+1 & k_0>0,\\ -1 & k_0<0.\end{cases}$$

方程[5.3]证明如下:

$$\int F(\boldsymbol{k},k_0)\delta(k^2+m^2)\mathrm{d}k_0=\int\delta(k_0^2-\omega^2)F(\boldsymbol{k},k_0)\mathrm{d}k_0.$$

若 $f(z_0)=0$, 则

$$\delta(f(z))=\sum_{z_0}\frac{\delta(z-z_0)}{|f'(z_0)|}.$$

于是,

$$\int \delta(k_0^2-\omega^2)F(\boldsymbol{k},k_0)\mathrm{d}k_0=\frac{1}{2\omega}[F(\boldsymbol{k},\omega)+F(\boldsymbol{k},-\omega)],$$

这就将方程[5.3]化为方程[5.1].

如果我们把正频率和负频率分开,

$$\left.\begin{aligned}\Delta^+(x)&=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)]\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega}\\ \Delta^-(x)&=\frac{i}{(2\pi)^3}\int\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\omega t)]\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega}\end{aligned}\right\},\qquad[5.4]$$

则得:

$$\left.\begin{aligned}\Delta^1(x)\equiv i(\Delta^+-\Delta^-)&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\{(\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)]\\ &\qquad+\exp[-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)]\}\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega}\\ &=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]\cos\omega t\,\frac{\mathrm{d}^3k}{\omega}\\ &=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\exp[i(kx)]\delta(k^2+m^2)\mathrm{d}^4k\end{aligned}\right\}.\qquad[5.5]$$

注: 在方程[5.3]中, 虽然 $\varepsilon(k)$ 看来似乎妨碍了相对论不变性, 但 $\varepsilon(k)\delta(k^2+m^2)$ 是洛伦兹不变式, 至少是关于不包含时间反演 $(k_0\to-k_0)$ 的洛伦兹变换是不变的.

我们来定义非齐次波动方程的其他解:

$$(\Box-m^2)\bar{\Delta}(x)=-\delta^4(x).\qquad[5.6]$$

这还不能唯一地定 $\bar{\Delta}$, 为此用下面关系式定 $\bar{\Delta}$:

$$\bar{\Delta}(x)=-\frac{1}{2}\varepsilon(x)\Delta(x);\quad\varepsilon(x)=\begin{cases}+1 & t>0\\ -1 & t<0.\end{cases}\qquad[5.7]$$

事实上, 这是方程[5.6]的一个解, 证明如下:

$$\Box\bar{\Delta}=-\frac{1}{2}\varepsilon\Box\Delta-\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Delta}{\partial x^\mu}-\frac{1}{2}(\Box\varepsilon)\Delta,$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^i}=0\quad(i\neq 4),\quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial x^4}=-i\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=-2i\delta(t)\\&\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x^4}\right)_{t=0}=-i\left(\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right)_{t=0}=+i\delta^3(\boldsymbol{x})\end{aligned}\right\}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\nu}\frac{\partial\Delta}{\partial x^\nu}$$

$$=+2\delta^4(x),$$

$$(\Box\varepsilon)\Delta=-\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}\Delta=-2\delta'(t)\Delta=+2\delta(t)\frac{\partial\Delta}{\partial t}$$

$$=-2\delta^4(x);$$

由此得到

$$(\Box-m^2)\bar{\Delta}=-\delta^4(x).$$

证毕.

注：下式是正确的：

$$\bar{\Delta}(-x)=+\bar{\Delta}(x).\qquad[5.8]$$

而且

$\Delta(t)=0$ 即意味着 $|\boldsymbol{x}|^2>t^2$ 时，有 $\bar{\Delta}(t)=0$，这是因为：

$$\Delta(\boldsymbol{x},0)=0,\quad\left(\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right)_{t=0}=-\delta^3(\boldsymbol{x}),$$

而且 Δ 是 $(x,x)=\boldsymbol{x}^2-t^2=-\lambda$ 的不变函数.（相反，$\boldsymbol{x}^2>t^2$ 时，Δ^1 一般不等于零.）

这里 $\bar{\Delta}$ 是由下列性质唯一确定的：

1. $(\Box-m^2)\bar{\Delta}(x)=-\delta^4(x)$;
2. $\bar{\Delta}(x)=0\qquad(\boldsymbol{x}^2>t^2)$;
3. $\bar{\Delta}(x)=\bar{\Delta}(-x)$.

这是正确的，理由是：性质 1 确定 $\bar{\Delta}$ 函数到齐次微分方程的解，而性质 2 排除与 Δ^1 成比例的附加项，性质 3 排除与 Δ 成比例的项.

方程[5.6]另外的解是提早 Δ 函数和推迟 Δ 函数：

推迟 Δ 函数是：

$$\Delta^{\text{ret}}(x)\cong\bar{\Delta}-\frac{1}{2}\Delta=-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\Delta;$$

提早 Δ 函数是：

$$\Delta^{adv}(x) \cong \bar{\Delta} + \frac{1}{2}\Delta = +\frac{1}{2}(1-\varepsilon)\Delta = \Delta^{ret}(-x)$$

我们有

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{ret}(x) &= \begin{cases} -\Delta(x) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \\ \Delta^{adv}(x) &= \begin{cases} 0 & t>0 \\ +\Delta(x) & t<0 \end{cases} \end{aligned}\right\}. \qquad [5.9]$$

关于这些函数的建立，参看许温格的文章①和本书§13.

这些函数足以用来解下面微分方程:

$$(\square - m^2)\varphi(x) = -f(x). \qquad [5.10]$$

这就是说,

$$\begin{aligned} \varphi_{ret}(x) &= \int \Delta^{ret}(x-x')f(x')\mathrm{d}^4x' \\ &= -\int_{t'<t} \Delta(x-x')f(x')\mathrm{d}^4x', \\ \varphi_{adv}(x) &= \int \Delta^{adv}(x-x')f(x')\mathrm{d}^4x' \\ &= +\int_{t'>t} \Delta(x-x')f(x')\mathrm{d}^4x', \\ \bar{\varphi}(x) &= \frac{1}{2}(\varphi_{ret}+\varphi_{adv}) = \int f(x')\bar{\Delta}(x-x')\mathrm{d}^4x'. \end{aligned}$$

我们有

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Delta}(x) &= \frac{1}{2}(\Delta^{ret}(x)+\Delta^{adv}(x)) \\ \Delta(x) &= \Delta^{adv}(x) - \Delta^{ret}(x) \end{aligned}\right\}. \qquad [5.11]$$

不作证明，而令

① J. SCHWINGER, *Phys. Rev.* **74**, 1439(1948); **75**, 651(1949); **76**, 790 (1949).

$$\bar{\Delta}(x)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi}\delta(\lambda)-\frac{m^2}{8\pi}J_1(m\sqrt{\lambda})\frac{1}{m\sqrt{\lambda}}, & \lambda=-(xx)\geqslant 0,\\ 0, & \lambda<0.\end{cases} \qquad [5.12]$$

对于 $m=0$, $\bar{\Delta}$ 只在光锥上才不为零.

$\bar{\Delta}$ 在动量空间中的一种表示法是:

$$\bar{\Delta}(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \mathscr{P}\int\frac{\exp[i(kx)]}{k^2+m^2}\mathrm{d}^4k.$$

这里$\mathscr{P}$表示关于 k_0 的主值. 容易证明它满足方程[5.6].

对于一阶极点, 在复平面中主值可定义如下(图 5.1):

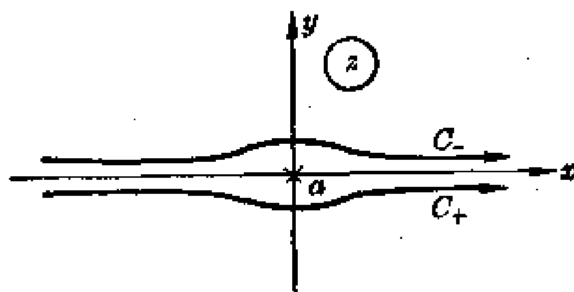


图 5.1

$$\mathscr{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x-a}=\frac{1}{2}\left(\int_{C_+}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-a}+\int_{C_-}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-a}\right).$$

那么, 我们可以建立:

$$\left.\begin{aligned}\Delta^C(x)&\equiv\Delta^1-2i\bar{\Delta}\\ &=\frac{-2i}{(2\pi)^4}\mathscr{P}\int\exp[i(kx)]\left[\frac{1}{k^2+m^2}+i\pi\delta(k^2+m^2)\right]\mathrm{d}^4k\\ &=-\frac{-2i}{(2\pi)^4}\int_C\frac{\exp[i(kx)]}{k^2+m^2}\mathrm{d}^4k\end{aligned}\right\}, \qquad [5.13]$$

其中路线 C 规定在图 5.2 中. 根据海森伯①, 我们定义

---

① W. HEISENBERG, *Z. Physik* 120, 513(1943). 也可参看 P. A. M. DIRAC *Quantum Mechanics*, 2 nd edition(Oxford; Clarendon Press, 1935), p. 200.

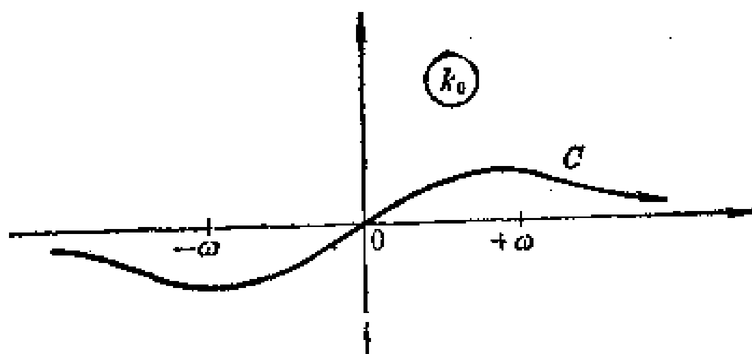


图 5.2

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{k^2+m^2}+i\pi\delta(k^2+m^2)\right)\equiv\delta_+(k^2+m^2).$$

而且

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta^C=2i\Delta^+(t>0), & \text{出射波}\\ \Delta^C=-2i\Delta^-(t<0), & \text{入射波}\end{array}\right\}. \qquad [5.14]$$

这函数在下述情况中出现．我们有方程[3.26]和[4.14]：

$$\{\psi_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(x')\}=-iS_{\alpha\beta}(x-x'),$$

$$\langle[\psi_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(x')]\rangle_0=-S^1_{\alpha\beta}(x-x').$$

如果，按照戴逊[1]，定义编时乘积或时序乘积，

$$\left.\begin{array}{lll}P(A(x)B(x'))=A(x)B(x') & & t>t'\\ \qquad\qquad\qquad=B(x')A(x) & & t<t'\end{array}\right\}, \qquad [5.15]$$

或

$$P(A(x)B(x'))=\frac{1}{2}\{A(x),B(x')\}+\frac{1}{2}\varepsilon(x-x')[A(x),B(x')]$$

[5.16]

（这不是一个不变式定义），则立即得：

$$\langle P(\psi_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(x'))\rangle_0\varepsilon(x-x')=-\frac{1}{2}S^C_{\alpha\beta}(x-x') \qquad [5.17]$$

关于 Δ^C 的物理意义，参看 § 28（对于 $m=0$）．

---

① F. J. DYSON, *Phys. Rev.* 75, 486(1949).

§ 6. 电荷共轭量

我们回到狄拉克方程[3.7], [3.10], [3.16]:

$$\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}+m\right)\psi=0, \qquad \bar{\psi}\left(\gamma\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}-m\right)=0,$$

$$j^{\mu}=ie(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi).$$

由 $\bar{\psi}$ 可以得到方程[3.7]的一个新的所谓电荷共轭解:

$$\left.\begin{aligned}\psi'&=C\bar{\psi}\\ \bar{\psi}'&=C^{-1}\psi\end{aligned}\right\}, \qquad [6.1]$$

如果 C 满足

$$\gamma^{\mu T}=-C^{-1}\gamma^{\mu}C \qquad [6.2]$$

的话, 其中转置矩阵 $\gamma^{\mu T}$ 由[3.13]定义.

这样的 C 是存在的. 因为如果两个矩阵系实行相同的代数运算, 则必然有一个相似变换, 可使一个矩阵系变到另一个矩阵系.

由于厄密性,

$$(\gamma^{\mu})^{*}=(\gamma^{\mu})^{T},$$

我们能证明:

$$\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}+m\right)\psi'=0.$$

因为

$$\bar{\psi}\left(\gamma\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}-m\right)=0$$

与

$$\left(\gamma^{T}\frac{\partial}{\partial x}-m\right)\bar{\psi}=0$$

相同, 则利用[6.2]式得

$$\left(-C^{-1}\gamma C\frac{\partial}{\partial x}-m\right)\bar{\psi}=0, \qquad \left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}+m\right)C\bar{\psi}=0.$$

证毕.

容易得出:

$$\left.\begin{array}{l} CC^{+}=1 \\ C^{T}=-C \end{array}\right\}. \qquad [6.3]$$

当存在外场时,狄拉克方程写作:

$$\left(\gamma^{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-ie\mathscr{A}_{\nu}\right)+m\right)\psi=0,$$

$$\bar{\psi}\left(\gamma^{\nu}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\nu}}+ie\mathscr{A}_{\nu}\right)-m\right)=0.$$

于是

$$\left(\gamma^{\nu T}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}+ie\mathscr{A}_{\nu}\right)-m\right)\bar{\psi}=0,$$

利用[6.2]得:

$$\left(\gamma^{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}+ie\mathscr{A}_{\nu}\right)+m\right)C\bar{\psi}=0,$$

$$\left(\gamma^{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}+ie\mathscr{A}_{\nu}\right)+m\right)\psi'=0;$$

就是说,ψ'和ψ一样满足狄拉克方程,只是在外场中电荷的符号是相反的. 在无场情况下,我们不需要区别ψ和ψ'.

在c数理论中,电流是

$$j^{\mu}(x)=ie(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi).$$

我们建立

$$j'^{\mu}(x)=ie(\bar{\psi}'\gamma^{\mu}\psi'),\quad \psi'=C\bar{\psi},\quad \bar{\psi}'=-\psi C^{-1},$$

所以

$$j'^{\mu}(x)=-ie(\psi C^{-1}\gamma^{\mu}C\bar{\psi})=ie(\psi\gamma^{\mu T}\bar{\psi}).$$

因此在c数理论中

$$j'^{\mu}(x)=j^{\mu}(x)$$

是不满足的.

在q数理论中,因为按照不相容原理进行量子化,我们可以

得到较多的满足，按照海森伯，令

$$j^{\mu}=\frac{1}{2}ie(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi-\psi\gamma^{\mu T}\bar{\psi})$$

$$=-\frac{1}{2}ie[\psi_{\alpha},\bar{\psi}_{\beta}]\gamma^{\mu}_{\beta\alpha}. \qquad [6.4]$$

更一般说来，对任何量都应写作：

$$\bar{\psi}F\psi\to\frac{1}{2}(\bar{\psi}F\psi-\psi F^{T}\bar{\psi})=-\frac{1}{2}[\psi_{\alpha},\bar{\psi}_{\beta}]F_{\beta\alpha}. \qquad [6.5]$$

于是

$$j'^{\mu}(x)=\frac{ie}{2}(\bar{\psi}'\gamma^{\mu}\psi'-\psi'\gamma^{\mu T}\bar{\psi}')=-j^{\mu}(x). \qquad [6.6]$$

如果将 ψ 按下式展开：

$$\psi_{\alpha}(x)=\sum_{r}A_{r}u_{\alpha}^{(r)}(x),$$

其中

$$\{A_{r},A_{s}^{*}\}=\delta_{rs},\quad\{A_{r},A_{s}\}=\{A_{r}^{*},A_{s}^{*}\}=0,$$

$$\langle A_{r}A_{s}^{*}\rangle_{0}=\delta_{rs}(1+\varepsilon_{r}),$$

$$\langle A_{r}^{*}A_{s}\rangle_{0}=\delta_{rs}(1-\varepsilon_{r}),$$

则总电荷是：

$$e=\int j^{0}\,\mathrm{d}^{3}x=\frac{1}{2}\sum_{r}[A_{r}^{*},A_{r}]$$

$$=\sum_{r}\left(N_{r}^{+}-\frac{1}{2}\right)-\sum_{r}\left(N_{r}^{-}-\frac{1}{2}\right). \qquad [6.7]$$

因为 S' 的奇异性，方程[6.4]中对易子的真空期待值不好确定．按照定义，若令

$$[\psi_{\alpha}(x),\bar{\psi}_{\beta}(x)]=\lim_{x'\to x}\frac{1}{2}\{[\psi_{\alpha}(x),\bar{\psi}_{\beta}(x')]$$

$$+[\psi_{\alpha}(x'),\bar{\psi}_{\beta}(x)]\}, \qquad [6.8]$$

则必定有

$$\langle j^{\mu}\rangle_0=0. \qquad [6.9]$$

此外，下式是正确的，

$$\left[C^{-1}\begin{pmatrix}S^1(-x)\\ \bar{S}(-x)\\ S^C(-x)\end{pmatrix}C\right]^T=\begin{pmatrix}S^1(x)\\ \bar{S}(x)\\ S^C(x)\end{pmatrix}; \qquad [6.10]$$

即

$$\left.\begin{aligned}C^{-1}_{\beta\rho}S^1_{\rho\sigma}(-x)C_{\sigma\alpha}&=S^1_{\alpha\beta}(x)\\ C^{-1}_{\beta\rho}S^{\pm}_{\rho\sigma}(-x)C_{\sigma\alpha}&=-S^{\mp}_{\alpha\beta}(x)\\ C^{-1}_{\beta\rho}S_{\rho\sigma}(-x)C_{\sigma\alpha}&=-S_{\alpha\beta}(x)\end{aligned}\right\}. \qquad [6.11]$$

而且还意味着：

$$\left.\begin{aligned}\{\psi'_{\alpha}(x),\bar{\psi}'_{\beta}(x')\}&=\{\psi_{\alpha}(x),\bar{\psi}_{\beta}(x')\}\\ \langle[\psi'_{\alpha}(x),\bar{\psi}'_{\beta}(x')]\rangle_0&=\langle[\psi_{\alpha}(x),\bar{\psi}_{\beta}(x')]\rangle_0\end{aligned}\right\}. \qquad [6.12]$$

第二章　对外场的响应：电荷重正化

§7. 电流的双线性表达式的真空期待值

我们有

$j^\mu(x)=ie(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x))$,

或更确切地说，

$$j^\mu(x)=-\frac{ie}{2}[\psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\beta(x)]\gamma^\mu_{\beta\alpha}.$$

注：这种重新安排只是使$\langle j^\mu(x)\rangle_0=0$，因此不影响计算.

我们要计算下列期待值：

$$\begin{aligned}\langle j^\mu(x)j^\nu(x')\rangle_0&=-e^2\langle\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x)\bar{\psi}_\rho(x')\psi_\sigma(x')\rangle_0\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma^\nu_{\rho\sigma}\\&=-e^2\langle\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\sigma(x')\rangle_0\langle\psi_\beta(x)\bar{\psi}_\rho(x')\rangle_0\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma^\nu_{\rho\sigma}.\end{aligned}$$

由于

$$S^-=\frac{1}{2}(S+iS^1),$$

$$S^+=\frac{1}{2}(S-iS^1),$$

$$\langle\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\rangle_0=-iS^+_{\alpha\beta}(x-x'),$$

$$\langle\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)\rangle_0=-iS^-_{\alpha\beta}(x-x'),$$

得：

$$\begin{aligned}\langle j^\mu(x)j^\nu(x')\rangle_0&=+e^2S^-_{\sigma\alpha}(x'-x)S^+_{\beta\rho}(x-x')\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma^\nu_{\rho\sigma}\\&=+e^2\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu S^+(x-x')\gamma^\nu S^-(x'-x)\},\end{aligned}$$

$$\langle j^\nu(x')j^\mu(x)\rangle_0=+e^2\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu S^-(x-x')\gamma^\nu S^+(x'-x)\},$$

及

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\langle\{j^{\mu}(x), j^{\nu}(x')\}\rangle_0 \\ =\frac{e^2}{4}\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu}S(x-x')\gamma^{\nu}S(x'-x) \\ +\gamma^{\mu}S^1(x-x')\gamma^{\nu}S^1(x'-x)\} \\ \frac{1}{2}\langle[j^{\mu}(x), j^{\nu}(x')]\rangle_0 \\ =\frac{ie^2}{4}\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu}S(x-x')\gamma^{\nu}S^1(x'-x) \\ -\gamma^{\mu}S^1(x-x')\gamma^{\nu}S(x'-x)\}\end{array}\right\}. \qquad [7.1]$$

利用下述有用的关系式:

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma})=\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}-\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\sigma}, \qquad [7.2]$$

得:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\langle\{(j^{\mu}(x), j^{\nu}(x')\}\rangle_0 \\ &=e^2\left\{\frac{\partial\Delta(x-x')}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\Delta(x'-x)}{\partial x'^{\nu}}+\frac{\partial\Delta(x-x')}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial\Delta(x'-x)}{\partial x'^{\mu}}\right. \\ &-\delta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial\Delta(x-x')}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\Delta(x'-x)}{\partial x'^{\alpha}}\right. \\ &\left.\left.-m^2\Delta(x-x')\Delta(x'-x)\right)+(\Delta\to\Delta')\right\}.\end{aligned}$$

写作

$$\frac{1}{2}\langle\{j^{\mu}(x), j^{\nu}(x')\}\rangle_0\equiv e^2\hat{K}_{\mu\nu}(x-x'), \qquad [7.3]$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{K}_{\mu\nu}(\xi)&=2\frac{\partial\Delta}{\partial\xi^{\mu}}\frac{\partial\Delta}{\partial\xi^{\nu}}+\delta_{\mu\nu}\left[-\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\xi}\right)^2-m^2\Delta\Delta\right] \\ &-2\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi^{\mu}}\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi^{\nu}}+\delta_{\mu\nu}\left[+\left(\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi}\right)^2+m^2\Delta^1\Delta^1\right].\end{aligned} \qquad [7.4]$$

类似地写出:

$$\frac{1}{2}\langle[j^{\mu}(x), j^{\nu}(x')]\rangle_0 \equiv -ie^2K_{\mu\nu}(x-x'), \tag{7.5}$$

其中

$$K_{\mu\nu}(\xi)=2\left\{\frac{\partial\Delta}{\partial\xi^{\mu}}\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi^{\nu}}+\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi^{\mu}}\frac{\partial\Delta}{\partial\xi^{\nu}}\right.$$
$$\left.+\delta_{\mu\nu}\left[-\frac{\partial\Delta}{\partial\xi^{\alpha}}\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi^{\alpha}}-m^2\Delta\Delta^1\right]\right\}. \tag{7.6}$$

变换到动量空间中去

令

$$\left.\begin{aligned} K_{\mu\nu}(x-x')&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int\exp[ip(x-x')]K_{\mu\nu}(p)\mathrm{d}^4p \\ K_{\mu\nu}(p)&=\int\exp[-ipx]K_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}^4x \end{aligned}\right\}, \tag{7.7}$$

而且

$$\Delta(x)=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int\exp[ikx]\varepsilon(k)\delta(k^2+m^2)\mathrm{d}^4k,$$

$$\Delta^1(x)=+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\exp[ikx]\delta(k^2+m^2)\mathrm{d}^4k.$$

于是得到:

$$\hat{K}_{\mu\nu}(p)=-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\delta(k^2+m^2)\delta((k-p)^2+m^2)$$
$$[1+\varepsilon(k)\varepsilon(p-k)]$$
$$\cdot[-k_{\mu}(p-k)_{\nu}-k_{\nu}(p-k)_{\mu}$$
$$-\delta_{\mu\nu}(-(p-k)_{\lambda}k_{\lambda}+m^2)]\mathrm{d}^4k, \tag{7.8}$$

$$K_{\mu\nu}(p)=\frac{-i}{(2\pi)^2}\int\delta(k^2+m^2)\delta((k-p)^2+m^2)$$
$$[\varepsilon(k)+\varepsilon(p-k)]$$
$$\cdot[-k_{\mu}(p-k)_{\nu}-k_{\nu}(p-k)_{\mu}$$

$$-\delta_{\mu\nu}(-(p-k)_\lambda k_\lambda+m^2)]\mathrm{d}^4k. \qquad [7.9]$$

注：1. 若再利用下式：

$$\varepsilon(k)+\varepsilon(p-k)=\varepsilon(p)[1+\varepsilon(k)\varepsilon(p-k)], \qquad [7.10]$$

则可看出：

$$K_{\mu\nu}(p)=i\varepsilon(p)\hat{K}_{\mu\nu}(p). \qquad [7.11]$$

2. 利用Δ和Δ^1满足齐次微分方程，容易证明：

$$\frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=0, \qquad [7.12]$$

$$\frac{\partial \hat{K}_{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=0. \qquad [7.13]$$

证明：

$$\frac{\partial \hat{K}_{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=2\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\frac{\partial\Delta}{\partial x^\nu}+2\frac{\partial\Delta}{\partial x^\mu}\Box\Delta-2\frac{\partial\Delta}{\partial x^\rho}\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^\rho\partial x^\mu}$$

$$-2m^2\Delta\frac{\partial\Delta}{\partial x^\mu}-(\text{以}\Delta^1\text{代替}\Delta\text{得到的相同表式})$$

$$=2(\Box-m^2)\Delta\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial x^\mu}-2(\Box-m^2)\Delta^1\frac{\partial\Delta^1}{\partial x^\mu}=0.$$

证毕.

有外场存在时，真空极化出现下述类似的表式（参看§8）：定义

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\varepsilon(x-x')\langle[j^\mu(x),j^\nu(x')]\rangle_0=+ie^2\bar{K}_{\mu\nu}(x-x')\\&\bar{K}_{\mu\nu}(x-x')=-\varepsilon(x-x')K_{\mu\nu}(x-x')\end{aligned}\right\}. \qquad [7.14]$$

我们断定：ε 可以移入微分号内；即，如果用$2\bar{\Delta}$代替Δ，则 $K_{\mu\nu}$ 成为 $\bar{K}_{\mu\nu}$. 于是，根据式[7.6]，

$$\bar{K}_{\mu\nu}(\xi)=4\left\{\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi^\nu}+\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\xi^\nu}-\delta_{\mu\nu}\left[\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\xi^\rho}\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi^\rho}+m^2\bar{\Delta}\Delta^1\right]\right\}. \qquad [7.15]$$

根据上述断定，要求

$$\Delta\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Delta^1}{\partial x^\nu}+\frac{\partial\Delta^1}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\nu}\Delta-\delta_{\mu\nu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\rho}\frac{\partial\Delta^1}{\partial x^\rho}\Delta=0;$$

即

$$\delta_{\mu 4}\delta(t-t')\Delta\frac{\partial\Delta^1}{\partial x^\nu}+\delta_{\nu 4}\delta(t-t')\Delta\frac{\partial\Delta^1}{\partial x^\mu}$$

$$-\delta_{\mu\nu}\delta(t-t')\frac{\partial\Delta^1}{\partial x^4}\Delta=0.$$

因为 $\Delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',0)=0$, 所以在有一定证明的情况下, 我们能够做出这样的假定; 只是在原点也许不正确. 相反, $\partial\bar{K}_{\mu\nu}/\partial x^\nu=0$ 的要求比较高. 因为:

$$(\Box-m^2)\bar{\Delta}(x)=-\delta^4(x),$$

于是

$$\frac{\partial\bar{K}_{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=4\frac{\partial\Delta^1}{\partial x^\mu}(\Box-m^2)\bar{\Delta}=-4\delta^4(x)\frac{\partial\Delta^1(x)}{\partial x^\mu}.$$

因为

$$\Delta^1=\frac{1}{2\pi^2(xx)}+\frac{m^2}{8\pi^2}\log|(xx)|+f_{\mathrm{reg}}(xx)$$

是在光锥附近的展开式, 其中 $f_{\mathrm{reg}}(-\lambda)$是 λ 的正规函数, 则

$$\frac{\partial\Delta^1}{\partial x^\mu}=-\frac{x^\mu}{\pi^2(xx)^2}+\frac{m^2}{4\pi^2}\frac{x^\mu}{(xx)}+2x^\mu f'_{\mathrm{reg}}(xx).$$

因此, 在原点这不为零. 这样, $\partial\bar{K}_{\mu\nu}/\partial x^\nu$ 是不确定的.

在动量空间中

$$\bar{\Delta}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\mathscr{D}\int\frac{\exp[i(px)]}{p^2+m^2}\mathrm{d}^4p,$$

因此

$$\bar{K}_{\mu\nu}(p)=4\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\frac{\delta(k^2+m^2)}{(p-k)^2+m^2}[-k_\mu(p-k)_\nu-k_\nu(p-k)_\mu$$

$$-\delta_{\mu\nu}(-(p-k)_\lambda k_\lambda+m^2)]\mathrm{d}^4k. \qquad [7.16]$$

最后, 我们也能够考虑核

$$\langle P(j^\mu(x),j^\nu(x'))\rangle_0=e^2K^C_{\mu\nu}(x-x'), \qquad [7.17]$$

则因

$$P(A(x), B(x')) = \frac{1}{2}\{A(x), B(x')\} + \frac{1}{2}\varepsilon(x-x')[A(x), B(x')],$$

得

$$K^C_{\mu\nu} = \hat{K}_{\mu\nu} + i\overline{K}_{\mu\nu}. \qquad [7.18]$$

而且，也有

$$K^C_{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{e^2}\langle P(j^\mu(x), j^\nu(x'))\rangle_0$$
$$= \gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma^\nu_{\rho\sigma}\langle P(\overline{\psi}_\beta(x), \psi_\rho(x'))\varepsilon(x-x')\rangle_0 \cdot\langle P(\psi_\alpha(x), \overline{\psi}_\sigma(x'))\varepsilon(x-x')\rangle_0$$
$$= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu S^C(x-x')\gamma^\nu S^C(x'-x)\};$$

因此

$$K^C_{\mu\nu} = -2\frac{\partial\Delta^C}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Delta^C}{\partial x^\nu} + \delta_{\mu\nu}\left[+\frac{\partial\Delta^C}{\partial x^\rho}\frac{\partial\Delta^C}{\partial x^\rho} + m^2\Delta^C\Delta^C\right], \quad [7.19]$$

因为 $\Delta^C = \Delta^1 - 2i\overline{\Delta}$，所以 $K^C_{\mu\nu}$ 与 $\hat{K}_{\mu\nu} + i\overline{K}_{\mu\nu}$ 符合.（参看下面注解.）

我们得

$$\frac{\partial K^C_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -2\frac{\partial\Delta^C}{\partial x^\mu}(\Box - m^2)\Delta^C = -4i\frac{\partial\Delta^C}{\partial x^\mu}\delta^4(x).$$

这里，

$$\Delta^C(x) = \lim_{\mu\to 0}\frac{-2i}{(2\pi)^4}\int\frac{\exp[i(kx)]}{k^2+m^2-i\mu^2}\mathrm{d}^4k,$$

而且，在动量空间中，

$$K^C_{\mu\nu}(p) = \frac{4}{(2\pi)^4}\int\frac{1}{k^2+m^2-i\mu^2}\cdot\frac{1}{(k-p)^2+m^2-i\mu^2} \cdot[-k_\mu(p-k)_\nu - k_\nu(p-k)_\mu - \delta_{\mu\nu}(-(p_\lambda-k_\lambda)k_\lambda + m^2)]\mathrm{d}^4k.$$

注: 1. 形式上,所有这些看着都很好;但是,计算发现:

$$K^C_{\mu\nu} \neq \hat{K}_{\mu\nu} + i\bar{K}_{\mu\nu}.$$

例如, $K^C_{\mu\nu}$ 的实部是

$$\mathrm{Re}K^C_{\mu\nu} = 2\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial x^\mu}\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial x^\nu} - \delta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial x^\rho}\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial x^\rho} + m^2\bar{\Delta}\bar{\Delta}\right) + \Delta^1\text{的项},$$

而

$$\hat{K}_{\mu\nu} = 2\frac{\partial\Delta}{\partial x^\nu}\frac{\partial\Delta}{\partial x^\mu} - \delta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x^\rho}\frac{\partial\Delta}{\partial x^\rho} + m^2\Delta\Delta\right) + \Delta^1\text{的项},$$

上面两式之差为:

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\nu}\Delta\right)\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\mu}\Delta\right) + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\nu}\frac{\partial\Delta}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Delta}{\partial x^\nu}\right)\varepsilon\Delta - \delta_{\mu\nu}\cdot(\text{对应项}).$$

因为我们确实假定了 $(\partial\varepsilon/\partial x^\nu)\Delta = 0$, 所以由

$$\bar{S} = -\frac{1}{2}\varepsilon S \text{ 和 } S = (\gamma(\partial/\partial x) - m)\Delta$$

得:

$$\bar{S} = \left(\gamma\frac{\partial}{\partial x} - m\right)\bar{\Delta}.$$

但是, $(\partial\varepsilon/\partial x^\mu)(\partial\Delta/\partial x^\nu)\varepsilon\Delta$ 显然是这种型式:

$$\delta_{\mu 4}\delta_{\nu 4}\delta^4(x)\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(0),$$

这是奇异的. 因此,它们是不确定的. 造成这种困难的原因, 是由于最初总是假设 $(\partial\varepsilon/\partial x^\nu)\Delta = 0$, 但是, 该量是与奇异函数相乘的, 所以, 在这里, 上述假定也许不能用.

这样的困难可以用泡利和维拉斯① 的规则化方法消除, 这是一种避免发散的形式上的方法, 我们命:

$$(K_{\mu\nu}(x))_{reg} = \sum_{i=0}^{N} C_i K_{\mu\nu}(x_i M_i^2),$$

其中

$$C_0 = 1, \qquad M_0 = m,$$

$$\sum_{i=0}^{N} C_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{N} C_i M_i^2 = 0,$$

① W. PAULI and F. VILLARS, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 434(1949).

最后命 $M_i\to\infty(i\neq0)$. 于是物理表达式变为有限的，上面那种困难不再出现.

2. 但是，$K^c_{\mu\nu}$ 有点特殊，因为，$\hat{K}_{\mu\nu}$ 是完全正规的，而对于 $K^c_{\mu\nu}$，代替 $\hat{K}_{\mu\nu}$ 的却是一个奇异量.

§ 8. 外场中的真空极化①

当存在外场 $\mathscr{A}_\nu$ 时，狄拉克方程写作：

$$\left(\gamma^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}+m\right)\psi(x)=ie\gamma^\nu\mathscr{A}_\nu(x)\psi(x);$$

$$\bar{\psi}(x)\left(\gamma^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}-m\right)=-ie\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\mathscr{A}_\nu(x).$$

如果将 $\psi(x)$ 按下式展开：

$$\psi(x)=\psi^{(0)}(x)+e\psi^{(1)}(x)+\cdots,$$

其中，当 $t\to-\infty$ 时，$\psi^{(n)}(x)\to0(n\neq0)$，而且 $\psi^{(0)}$ 是自由场狄拉克方程的一个解，则 $\psi^{(1)}$ 遵从下述微分方程：

$$\left(\gamma^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}+m\right)e\psi^{(1)}=ie\gamma^\nu\mathscr{A}_\nu\psi^{(0)}.$$

利用格林函数

$$S^{\mathrm{ret}}=\bar{S}-\frac{1}{2}S,\quad S^{\mathrm{adv}}=\bar{S}+\frac{1}{2}S,$$

其解为：

$$\left.\begin{aligned}e\psi^{(1)}&=-ie\int S^{\mathrm{ret}}(x-x')\gamma^\nu\mathscr{A}_\nu(x')\psi^{(0)}(x')\mathrm{d}^4x'\\ e\bar{\psi}^{(1)}&=-ie\int\bar{\psi}^{(0)}(x')\gamma^\nu\mathscr{A}_\nu(x')S^{\mathrm{adv}}(x'-x)\mathrm{d}^4x'\end{aligned}\right\}.\qquad[8.1]$$

将[8.1]代入微分方程中，容易证明它是微分方程的解.

我们得到：例如，

① G. KÄLLÉN, *Helv Phys. Acta* 22, 637(1949).

$$\left(\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}+m\right)S^{\text{ret}}=\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}+m\right)\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}-m\right)\left(\overline{\Delta}-\frac{1}{2}\Delta\right)$$

$$=(\Box-m^2)\left(\overline{\Delta}-\frac{1}{2}\Delta\right)=-\delta^4(x).$$

如果将 $\psi(x)$的展开式代入下式:

$$j^{\mu}(x)=-\frac{ie}{2}[\psi_{\alpha}(x),\overline{\psi}_{\beta}(x)]\gamma^{\mu}_{\alpha\beta},$$

则

$$j^{\mu(1)}(x)=-\frac{ie^2}{2}([\psi^{(1)}_{\alpha}(x),\overline{\psi}^{(0)}_{\beta}(x)]+[\psi^{(0)}_{\alpha}(x),$$

$$\overline{\psi}^{(1)}_{\beta}(x)])\gamma^{\mu}_{\alpha\beta},$$

并且,根据[8.1],有,

$$\langle j^{\mu(1)}(x)\rangle_0=\frac{e^2}{2}\int\mathscr{A}_{\nu}(x')\operatorname{Tr}\{\gamma^{\mu}S^{\text{ret}}(x-x')\gamma^{\nu}S^1(x'-x)$$

$$+\gamma^{\mu}S^1(x-x')\gamma^{\nu}S^{\text{adv}}(x'-x)\}\mathrm{d}^4x'. \qquad [8.2]$$

这里,如果用 $\bar{S}$ 和 S 的表达式代替 S^{ret} 和 S^{adv}, 明显地计算迹,则得:

$$\langle j^{\mu(1)}(x)\rangle_0=e^2\int[K_{\mu\nu}(x-x')-\overline{K}_{\mu\nu}(x-x')]\mathscr{A}_{\nu}(x')\mathrm{d}^4x',$$

$$\langle j^{\mu(1)}(x)\rangle_0=i\int\langle[j^{\mu}(x),j^{\nu}(x')]\rangle_0\frac{1+\epsilon(x-x')}{2}\mathscr{A}_{\nu}(x')\mathrm{d}^4x'.$$

[8.3]

这种方法不使用能量概念,在论述自旋为零的粒子时,将证明是方便的.

§9. 自旋等于零的粒子

这种粒子用复数标量场Φ描述,Φ满足下述微分方程:

$$(\Box-m^2)\Phi(x)=0. \qquad [9.1]$$

在 c 数理论中,电流写作

$$j^\nu = ie\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x^\nu}\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}\Phi^*\right), \qquad [9.2]$$

由此得 $\partial j^\nu/\partial x^\nu = 0$.

令Φ按本征函数完全集展开:

$$\Phi(x) = \sum_r A_r u^{(r)}(x), \qquad [9.3]$$

例如,对于平面波:

$$u^{(r)}(x) = \frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\omega_r}}\exp[i(k_r x)],$$

$$\omega_r = +\sqrt{k_r^2+m^2},\quad k_0 = \pm\omega.$$

则电荷是:

$$e = \int j^0\,\mathrm{d}^3x;\quad e_{rs} = -ie\int\left(\frac{\partial u^{(r)*}}{\partial x^0}u^{(s)} - \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x^0}u^{(r)*}\right)\mathrm{d}^3x = e\,\varepsilon_r\delta_{rs}.$$

而能量是:

$$E_{rs} = \int\left(\frac{\partial u^{(r)*}}{\partial x^0}\frac{\partial u^{(s)}}{\partial x^0} + \frac{\partial u^{(r)*}}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \boldsymbol{x}} + m^2 u^{(r)*}u^{(s)}\right)\mathrm{d}^3x = \omega_r\delta_{rs}.$$

(若使 E_{rs} 对角化,则最后的这些表式是正确的.)这里我们可以看出,能量是正定的,而电荷是不定的. 下列完全性关系式成立:

$$\left.\begin{aligned}\sum_r u^{(r)}(x)u^{(r)*}(x')\varepsilon_r &= i\Delta(x-x')\\ \sum_r u^{(r)}(x)u^{(r)*}(x') &= \Delta^1(x-x')\end{aligned}\right\}. \qquad [9.4]$$

为了量子化,我们必须利用玻色-爱因斯坦统计,即,采用对易子(而不是对自旋等于$\frac{1}{2}$的粒子所采用的反对易子)。可以看到,我们能够毫不困难地进行量子化,只要令

$$[A_r, A_s^*]=\varepsilon_r\cdot\delta_{rs};\qquad [9.5]$$

即
$$A_r^*A_r=N_r\qquad(\varepsilon_r>0),$$
$$A_rA_r^*=N_r\qquad(\varepsilon_r<0),$$

或
$$A_r^*A_r=N_r\frac{1+\varepsilon_r}{2}+(N_r+1)\frac{1-\varepsilon_r}{2},$$

$$\left.\begin{aligned}A_r^*A_r&=N_r+\frac{1-\varepsilon_r}{2}\\ A_rA_r^*&=N_r+\frac{1+\varepsilon_r}{2}\end{aligned}\right\}.\qquad [9.6]$$

由此得:

$$[\Phi(x), \Phi^*(x')]=i\Delta(x-x'),\qquad [9.7]$$

$$\langle\{\Phi(x), \Phi^*(x')\}\rangle_0=\Delta^1(x-x').\qquad [9.8]$$

注意: 这里Φ和 Φ^* 能随意互换.

$$\left.\begin{aligned}&[\Phi^*(x), \Phi(x')]=[\Phi(x), \Phi^*(x')]=i\Delta(x-x')\\ &\langle\{\Phi^*(x), \Phi(x')\}\rangle_0=\langle\{\Phi(x), \Phi^*(x')\}\rangle_0=\Delta^1(x-x')\end{aligned}\right\}.$$
[9.9]

因此, 在这里电荷共轭变为很不重要:

$$\left.\begin{aligned}\Phi'&=\Phi^*\\ \Phi^{*\prime}&=\Phi\end{aligned}\right\}.\qquad [9.10]$$

这样, 甚至在 c 数理论中, 在这种变换下, 电流改变符号. 在 q 数理论中, 我们必须首先恰当地对称化:

$$j^\nu(x)=\frac{ie}{2}\left(\left\{\frac{\partial\Phi^*}{\partial x^\nu}, \Phi\right\}-\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu}, \Phi^*\right\}\right),\qquad [9.11]$$

其中$\{A(x), B(x)\}$须理解为:

$$\lim_{x'\to x}\frac{1}{2}(\{A(x'), B(x)\}+\{A(x), B(x')\}).$$

甚至在极限过程之前, 就有 $j'^\nu(x)=-j^\nu(x)$, 于是,

$$\langle j^\nu(x)\rangle_0=0.$$

注：和 c 数理论类似，能量将是：

$$E=\int\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial x^0}\frac{\partial\Phi}{\partial x^0}+\frac{\partial\Phi^*}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+m^2\ \Phi^*\Phi\right)\mathrm{d}^3x \qquad [9.12]$$

$$=\sum_r\omega_r A_r^* A_r=\sum_r\omega_r\left(N_r+\frac{1-\varepsilon_r}{2}\right).$$

于是，我们可取 $\sum_r\varepsilon_r=0$；即如前面对于反对易子所取的那样，能量将成为：

$$E=\sum_r\left(N_r+\frac{1}{2}\right)\omega_r=\sum_r\omega_r(N_r^++N_r^-+1).$$

对电子已经有：

$$E=\sum_{r,\lambda}\omega_r(N_r^++N_r^--1),\ \lambda=1,2.$$

我们会问，这些零点能是否能够相互补偿？我们有：

$$\begin{cases}\text{自旋等于 }0\text{：}\ \dfrac{E_0}{V}=\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^3\displaystyle\int\sqrt{k^2+m^2}\mathrm{d}^3k;\\ \text{自旋等于}\dfrac{1}{2}\text{：}\ \dfrac{E_0}{V}=-2\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^3\displaystyle\int\sqrt{k^2+m^2}\,\mathrm{d}^3k;\end{cases}$$

一般说来，式中的质量是不相同的。关于补偿，我们必须计算：

$$\int_0^k k^2\sqrt{k^2+m^2}\mathrm{d}k=\frac{K^4}{4}+\frac{1}{4}m^2K^2-\frac{m^4}{4}\log\frac{2K}{m}+O\left(\frac{1}{K}\right).$$

可以看到，补偿的要求是：

(自旋为零的粒子的种类数目)$=2\times$(自旋为$\frac{1}{2}$的粒子的种类数目)；

即，

$$Z_0=2Z_{\frac{1}{2}}.$$

而且，

$$\sum_i(m_0^i)^2=2\Sigma\left(m_{\frac{1}{2}}^i\right)^2,$$

$$\sum_i(m_0^i)^4=2\Sigma\left(m_{\frac{1}{2}}^i\right)^4,$$

$$\Sigma(m_0^i)^4\log m_0^i=2\sum_i\left(m_{\frac{1}{2}}^i\right)^4\log m_{\frac{1}{2}}^i.$$

这些要求是如此广泛，确切地说，事实上未必能够满足.

另外的一些公式是：

$$\left.\begin{aligned}\langle\Phi(x)\Phi^*(x')\rangle_0&=\langle\Phi^*(x)\Phi(x')\rangle_0\\&=\frac{1}{2}(\Delta^1+i\Delta)(x-x')\\&=+i\Delta^+(x-x')\\\langle\Phi^*(x')\Phi(x)\rangle_0&=\langle\Phi(x')\Phi^*(x)\rangle_0\\&=\frac{1}{2}(\Delta^1-i\Delta)(x-x')\\&=-i\Delta^-(x-x')\\\langle P(\Phi^*(x)\Phi(x'))\rangle_0&=\frac{1}{2}\Delta^C(x-x')\end{aligned}\right\}. \qquad [9.13]$$

关于电流应该注意的是：在外场 $\mathscr{A}_\mu$ 中，按照一般规则 $\partial/\partial x^\mu \to\partial/\partial x^\mu+ie\mathscr{A}_\mu$，方程[9.11]中必须加一附加项：

$$\begin{aligned}j^\mu(x)=&\frac{ie}{2}\left(\left\{\frac{\partial\Phi^*}{\partial x^\mu},\Phi(x)\right\}-\left\{\Phi^*(x),\frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu}\right\}\right)\\&-\frac{1}{2}e^2\mathscr{A}_\mu(x)\left\{\Phi^*(x),\Phi(x)\right\}.\end{aligned} \qquad [9.14]$$

连续性方程依然正确.

在构成电流的双线性表达式的真空期待值时，必定形成如下表式的真空期待值：

$$\Phi(x)\frac{\partial\Phi^*(x)}{\partial x^\mu}\Phi(x')\frac{\partial\Phi^*(x')}{\partial x'^\nu}.$$

这里，我们又只须取不同变量 x 和 x' 的场偶，因而可以省去反对易子（与自旋为$\frac{1}{2}$的情况相比较）：

$$\begin{aligned}\langle j^\mu(x)j^\nu(x')\rangle_0=&-e^2\left\langle\frac{\partial\Phi^*(x)}{\partial x^\mu}\Phi(x')\right\rangle_0\\&\cdot\left\langle\Phi(x)\frac{\partial\Phi^*(x')}{\partial x'^\nu}\right\rangle_0\end{aligned}$$

$$+e^2\left\langle\frac{\partial\Phi^*(x)}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Phi(x')}{\partial x'^\nu}\right\rangle_0(\Phi(x)\Phi^*(x'))_0$$

$$-e^2\left\langle\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^\mu}\Phi^*(x')\right\rangle_0\left\langle\Phi^*(x)\frac{\partial\Phi(x')}{\partial x'^\nu}\right\rangle_0$$

$$+e^2\left\langle\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Phi^*(x')}{\partial x'^\nu}\right\rangle_0\langle\Phi^*(x)\Phi(x')\rangle_0+O(e^3),$$

$$\langle j^\mu(x)j^\nu(x')\rangle_0=2e^2\left(-\frac{\partial\Delta^+}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Delta^+}{\partial x^\nu}+\frac{\partial^2\Delta^+}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\Delta^+\right)+O(e^3).$$

[9.15]

如果我们舍去 $O(e^3)$ 项(这相当于令 $\mathscr{A}_\mu=0$)并定义:

$$\frac{1}{2}\langle\{j^\mu(x),j^\nu(x')\}\rangle_0\equiv e^2\hat{L}_{\mu\nu}(x-x'),\qquad [9.16]$$

$$\frac{1}{2}\langle[j^\mu(x),j^\nu(x')]\rangle_0\equiv -ie^2L_{\mu\nu}(x-x'),\qquad [9.17]$$

于是,

$$\hat{L}_{\mu\nu}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi^\nu}-\frac{\partial\Delta}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial\Delta}{\partial\xi^\nu}-\frac{\partial^2\Delta^1}{\partial\xi^\mu\partial\xi^\nu}\Delta^1+\frac{\partial^2\Delta}{\partial\xi^\mu\partial\xi^\nu}\Delta\right),$$

[9.18]

$$L_{\mu\nu}(\xi)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi^\nu}+\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial\Delta}{\partial\xi^\nu}-\Delta\frac{\partial^2\Delta^1}{\partial\xi^\mu\partial\xi^\nu}\right.$$
$$\left.-\Delta^1\frac{\partial^2\Delta}{\partial\xi^\mu\partial\xi^\nu}\right).\qquad [9.19]$$

与§8中所讨论的类似,我们也能计算外场中的真空极化:

$$\Phi=\Phi^{(0)}+\Phi^{(1)}+\cdots,$$

$$\Phi^{(1)}=0\qquad 当\ t\to-\infty,$$

$$(\Box-m^2)\Phi^{(0)}=0,$$

$$\Phi^{(1)}(x)=-ie\int\mathscr{A}_\nu(x')\left(\Delta^{\rm ret}(x-x')\frac{\partial\Phi^{(0)}(x')}{\partial x'^\nu}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\Delta^{\rm ret}(x-x')}{\partial x'^\nu}\Phi^{(0)}(x')\right)d^4x'.\qquad [9.20]$$

于是，

$$j^{\mu(1)}(x)=\frac{ie}{2}\Big(\Big\{\frac{\partial\Phi^{(0)*}}{\partial x^{\mu}},\ \Phi^{(1)}\Big\}$$

$$-\Big\{\Phi^{(0)*},\ \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial x^{\mu}}\Big\}+\Big\{\frac{\partial\Phi^{(1)*}}{\partial x^{\mu}},\ \Phi^{(0)}\Big\}$$

$$-\Big\{\Phi^{(1)*},\ \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial x^{\mu}}\Big\}\Big)$$

$$-\frac{1}{2}e^{2}\mathscr{A}_{\mu}\{\Phi^{(0)*},\ \Phi^{(0)}\},$$

$$\langle j^{\mu(1)}(x)\rangle_0=\frac{e^2}{2}\int\mathscr{A}_{\nu}(x')\Big[\Delta^{\rm ret}(x-x')\Big\langle\Big\{\frac{\partial\Phi^{(0)*}(x)}{\partial x^{\mu}},$$

$$\frac{\partial\Phi^{(0)}(x')}{\partial x'^{\nu}}\Big\}\Big\rangle_0$$

$$+\frac{\partial\Delta^{\rm ret}(x-x')}{\partial x^{\nu}}\Big\langle\Big\{\frac{\partial\Phi^{(0)*}(x)}{\partial x^{\mu}},\ \Phi^{(0)}(x')\Big\}\Big\rangle_0$$

$$-\frac{\partial\Delta^{\rm ret}(x-x')}{\partial x^{\mu}}\Big\langle\Big\{\Phi^{(0)*}(x),\ \frac{\partial\Phi^{(0)}(x')}{\partial x'^{\nu}}\Big\}\Big\rangle_0$$

$$-\frac{\partial^2\Delta^{\rm ret}(x-x')}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\langle\{\Phi^{(0)*}(x),\Phi^{(0)}(x')\}\rangle_0$$

$$-\frac{\partial\Delta^{\rm ret}(x-x')}{\partial x^{\mu}}\Big\langle\Big\{\frac{\partial\Phi^{(0)*}(x')}{\partial x'^{\nu}},\ \Phi^{(0)}(x)\Big\}\Big\rangle_0$$

$$-\frac{\partial^2\Delta^{\rm ret}(x-x')}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\langle\{\Phi^{(0)*}(x),\Phi^{(0)}(x')\}\rangle_0$$

$$+\Delta^{\rm ret}(x-x')\Big\langle\Big\{\frac{\partial\Phi^{(0)*}(x')}{\partial x'^{\nu}},\ \frac{\partial\Phi^{(0)}(x)}{\partial x^{\mu}}\Big\}\Big\rangle_0$$

$$+\frac{\partial\Delta^{\rm ret}(x-x')}{\partial x^{\nu}}\Big\langle\Big\{\Phi^{(0)*}(x'),\ \frac{\partial\Phi^{(0)}(x)}{\partial x^{\mu}}\Big\}\Big\rangle_0$$

$$-\delta_{\mu\nu}\delta^4(x-x')\langle\{\Phi^{(0)*}(x),\ \Phi^{(0)}(x')\}\rangle_0\Big]{\rm d}^4x'.$$

若以 $\Delta^{\rm ret}=\overline{\Delta}-\frac{1}{2}\Delta$ 代入，则可写作：

$$\langle j^{\mu(1)}(x)\rangle_0=\frac{i}{2}\int\mathscr{A}_{\nu}(x')\langle[j^{\mu(0)}(x),\ j^{\nu(0)}(x')]\rangle_0{\rm d}^4x'$$

$$-e^2\int\mathscr{A}_\nu(x')\bar{L}_{\mu\nu}(x-x')\mathrm{d}^4x', \qquad [9.21]$$

其中

$$\bar{L}_{\mu\nu}(\xi)=-\Big(\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi^\nu}+\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\xi^\nu}\frac{\partial\Delta^1}{\partial\xi^\mu}-\bar{\Delta}\frac{\partial^2\Delta^1}{\partial\xi^\mu\partial\xi^\nu}$$

$$-\Delta^1\frac{\partial^2\bar{\Delta}}{\partial\xi^\mu\partial\xi^\nu}-\delta_{\mu\nu}\delta^4(\xi)\Delta^1\Big) \qquad [9.22]$$

注：1. $\bar{L}_{\mu\nu}(\xi)\neq\varepsilon(\xi)\cdot L_{\mu\nu}(\xi)$.

2. 能够定义：

$$L^C_{\mu C}=\hat{L}_{\mu\nu}+i\bar{L}_{\mu\nu}.$$

但是，因为 $\bar{L}_{\mu\nu}\neq\varepsilon L_{\mu\nu}$，所以，$\langle P(j^\mu(x)j^\nu(x'))\rangle_0=L^C_{\mu\nu}(x-x')$ 又是不正确的. 相反，

$$L^C_{\mu\nu}(\xi)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\Delta^C}{\partial\xi^\mu}\cdot\frac{\partial\Delta^C}{\partial\xi^\nu}-\frac{\partial^2\Delta^C}{\partial\xi^\mu\partial\xi^\nu}\Delta^C+2i\delta^4(\xi)\Delta^1(\xi)\delta_{\mu\nu}\Big), \qquad [9.23]$$

3. 为了满足规范不变性，量 $\langle j^{\mu(1)}\rangle_0$ 应该满足连续性方程. 而计算表明并不是这样的.

在§7中，我们有

$$\frac{\partial\bar{K}_{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=-4\delta^4(x)\frac{\partial\Delta^1(x)}{\partial x^\mu}. \qquad [9.24]$$

相应地，我们得到：

$$\frac{\partial\bar{L}_{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=+2\delta^4(x)\frac{\partial\Delta^1(x)}{\partial x^\mu}. \qquad [9.25]$$

4. 自旋为0和自旋为1/2粒子的混合物(拉依斯基、梅泽[①])，在粒子质量相等的情况下，自旋为零的粒子数等于自旋为1/2的粒子数两倍时，不定式[9.24]和[9.25]的补偿得到满足. 当粒子质量不相等时，下述条件是充分的：

$$N_0=2N_{\frac{1}{2}},$$

$$\sum_i(m_0^i)^2=2\sum_i\Big(m^i_{\frac{1}{2}}\Big)^2.$$

这些条件包含在零点能补偿的条件中(参看§9注). 当粒子质量不同时，因

① J. RAYSKI, *Acta Phys. Polonica* 9, 129(1948); H. UMEZAWA, J. YUKAWA, and E. YAMADA, *Progr. Theor. Phys.* 3, 317(1948).

为，

$$\frac{\partial\Delta^1}{\partial x^\mu}\sim\frac{x^\mu}{(xx)^2}+am^2\frac{x^\mu}{(xx)}+x^\mu f_{reg}(xx),$$

第二项的补偿也产生一个条件．无论如何，这种混合物是否有物理意义是可疑的．

5．这里，由组合 $K^C=\hat{K}+i\overline{K}$ 和 $L^C=\hat{L}+i\overline{L}$ 引入函数 Δ^C 是人为的；首先，在 S 矩阵中它是有意义的．如同由 $K^C_{\mu\nu}$ 导出的那样，$L^C_{\mu\nu}$ 也导出 $\delta^4(x)\overline{\Delta}(x)$ 形式的人为奇异性．

由

$$L(p)=\int\exp[-ipx]L(x)\mathrm{d}^4x,$$

立即得到在动量空间中的表示为：

$$\begin{aligned}L^C_{\mu\nu}(p)=-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int&[-k_\mu(p-k)_\nu-k_\nu(p-k)_\mu\\&+(p-k)_\mu(p-k)_\nu+k_\mu k_\nu\\&-\delta_{\mu\nu}(k^2+2m^2+(p-k)^2)]\\&\cdot\frac{\mathrm{d}^4k}{(k^2+m^2-i\mu^2)((k-p)^2+m^2-i\mu^2)},\end{aligned}\quad[9.26]$$

$$\begin{aligned}\hat{L}_{\mu\nu}(p)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int&[-k_\mu(p-k)_\nu-k_\nu(p-k)_\mu\\&+(p-k)_\mu(p-k)_\nu+k_\mu k_\nu]\\&[1+\varepsilon(k)\varepsilon(p-k)]\cdot\delta(k^2+m^2)\delta((k-p)^2+m^2)\mathrm{d}^4k,\end{aligned}\quad[9.27]$$

$$\begin{aligned}L_{\mu\nu}(p)=\frac{i}{4}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int&[-k_\mu(p-k)_\nu-k_\nu(p-k)_\mu\\&+(p-k)_\mu(p-k)_\nu+k_\mu k_\nu]\\&[\varepsilon(k)+\varepsilon(p-k)]\cdot\delta(k^2+m^2)\delta((k-p)^2+m^2)\mathrm{d}^4k.\end{aligned}\quad[9.28]$$

因为

$$\varepsilon(k)+\varepsilon(p-k)=\varepsilon(p)[1+\varepsilon(k)\varepsilon(p-k)],$$

我们有

$$L_{\mu\nu}(p)=i\varepsilon(p)\hat{L}_{\mu\nu}(p).$$

§10. 核$\hat{K}$和$\hat{L}$的计算

$\hat{K}_{\mu\nu}$和$\hat{L}_{\mu\nu}$是与真空中电荷涨落有关的量. 现在我们将它们计算出来. 我们有:

$$\hat{K}_{\mu\nu}(p)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\delta(k^2+m^2)\delta((k-p)^2+m^2)$$
$$[\varepsilon(k)\varepsilon(p-k)+1]$$
$$\cdot[-2k_\mu k_\nu+k_\mu p_\nu+k_\nu p_\mu-\delta_{\mu\nu}((pk)-k^2-m^2)]\mathrm{d}^4k,$$

$$\hat{L}_{\mu\nu}(p)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\delta(k^2+m^2)\delta((k-p)^2+m^2)$$
$$[\varepsilon(k)\varepsilon(p-k)+1]$$
$$\cdot\frac{1}{2}\left[2k_\mu k_\nu-k_\mu p_\nu-k_\nu p_\mu+\frac{1}{2}p_\mu p_\nu\right]\mathrm{d}^4k.$$

在计算中,我们注意到δ函数同时要求:

$$k^2+m^2=0,$$

和

$$p^2-2(pk)=0.$$

这对类空p是可能的,对类时p也是可能的.

1. 类空p

在坐标$p=(\boldsymbol{p},0)$中,有$\boldsymbol{p}^2-2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p}=0$, 则.

$$\varepsilon(k)\varepsilon(p-k)=\varepsilon(-k)\varepsilon(k)=-1,$$

并且积分恒为零.

2. 类时p

我们选择$p=(0,ip_0)$, 则$-p_0^2+2p_0k_0=0$, 于是,

$$k_0=\frac{1}{2}p_0=\pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2},$$

并且，

$$\varepsilon(\boldsymbol{k})\varepsilon(p-\boldsymbol{k})=\varepsilon(k_0)\varepsilon(k_0)=+1.$$

而且，$\boldsymbol{k}^2=\frac{1}{4}p_0^2-m^2$. 所以 $p_0^2\geqslant 4m^2$，或者一般地说，$-p^2\geqslant 4m^2$.

那么，

$$\hat{K}_{11}(p)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\cdot 2\int\delta(k^2+m^2)\delta(p^2-2(kp))$$

$$[-2k_1^2+p_0k_0]\mathrm{d}^4k$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\cdot 2\int\delta(k^2+m^2)\delta(p^2-2(kp))$$

$$\left[-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}^2+\frac{1}{2}p_0^2\right]\mathrm{d}^4k,$$

因为积分号内

$$\begin{cases}k_1^2\simeq\frac{1}{3}\boldsymbol{k}^2,\\ p_0k_0=+\frac{1}{2}p_0^2,\end{cases}$$

但是，

$$-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}^2+\frac{1}{2}p_0^2=-\frac{1}{6}p_0^2+\frac{2}{3}m^2+\frac{1}{2}p_0^2$$

$$=\frac{1}{3}(p_0^2+2m^2),$$

所以

$$\hat{K}_{11}(p)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\delta(k^2+m^2)\delta(p^2-2(kp))$$

$$\cdot\frac{2}{3}(p_0^2+2m^2)\mathrm{d}^4k.$$

而且

$$\begin{cases}\hat{K}_{44}(p)=0\\ \hat{L}_{44}(p)=0\end{cases}.$$

(因为 $\hat{K}_{\mu\nu}p_\nu=0$, $\hat{L}_{\mu\nu}p_\nu=0$).

对于任意坐标系，还必须插入 $(p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}p^2)/(-p^2)$，因为在我们的坐标系中，当 $\mu=\nu=1$ 时，其值为 1；而当 $\mu=\nu=4$ 时，其值为 0。于是，

$$\left.\begin{array}{l}\hat{K}_{\mu\nu}(p)\\ \hat{L}_{\mu\nu}(p)\end{array}\right\}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\delta(k^2+m^2)\delta((k-p)^2+m^2)$$

$$\cdot 2\cdot\frac{p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}p^2}{-p^2}\cdot\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}(-p^2+2m^2)\\ \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}p^2-m^2\right)\end{array}\right\}d^4k.$$

k_0 的符号是固定的 $(k_0=p_0/2)$.

利用

$$\delta(f(z))=\sum_\nu\frac{\delta(z-z_\nu)}{|f'(z_\nu)|},$$

其中 $f(z_\nu)=0$，我们得到：

$$\int\delta(k^2+m^2)\delta((k-p)^2+m^2)d^4k$$

$$=\int\delta\left(2\sqrt[+]{\boldsymbol{k}^2+m^2}|p_0|-2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p}-p_0^2+\boldsymbol{p}^2\right)$$

$$\frac{d^3k}{2\sqrt[+]{\boldsymbol{k}^2+m^2}},$$

当 $\boldsymbol{p}=0$ 时，上式等于：

$$4\pi\int\delta\left(2\sqrt[+]{k^2+m^2}|p_0|-p_0^2\right)\frac{k^2dk}{2\sqrt[+]{k^2+m^2}}$$

$$=2\pi\frac{k^2}{\sqrt[+]{k^2+m^2}}\cdot\frac{1}{(2k/\sqrt[+]{k^2+m^2})|p_0|}\Bigg|_{k^2=\frac{1}{4}p_0^2-m^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{4m^2+p^2}{p^2}}.$$

于是，

$$\left.\begin{matrix}\hat{K}_{\mu\nu}(p)\\ \hat{L}_{\mu\nu}(p)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{12\pi}\sqrt{\frac{4m^2-p^2}{p^2}}.$$

$$\frac{p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}p^2}{-p^2}\begin{cases}(-p^2+2m^2)\\ \left(-\frac{1}{4}p^2-m^2\right)\end{cases}\qquad -p^2\geqslant 4m^2, \qquad [10.1]$$

$$\left.\begin{matrix}\hat{K}_{\mu\nu}(p)\\ \hat{L}_{\mu\nu}(p)\end{matrix}\right\}=0 \qquad \text{除上述条件外.}$$

那么，我们有：

$$\left.\begin{matrix}\hat{K}_{\mu\nu}(x)\\ \hat{L}_{\mu\nu}(x)\end{matrix}\right\}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int\exp[i(px)]\begin{Bmatrix}\hat{K}_{\mu\nu}(p)\\ \hat{L}_{\mu\nu}(p)\end{Bmatrix}\mathrm{d}^4p$$

和

$$\left.\begin{matrix}\hat{K}_{\mu\nu}(x)\\ \hat{L}_{\mu\nu}(x)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2e^2}\langle\{j^\mu(x),j^\nu(x')\}\rangle_0,$$

上式对$\frac{1}{2}$自旋是正确的，下式对零自旋是正确的．方程[10.1]决定在时-空区域V中的电荷涨落：

$$\langle Q_V^2\rangle_0=\left\langle\left(\int_V j^0(x)\mathrm{d}^4x\right)^2\right\rangle_0$$

$$=e^2\int\mathrm{d}^4x\int\mathrm{d}^4x'\cdot\begin{Bmatrix}\hat{K}_{00}(x-x')\\ \hat{L}_{00}(x-x')\end{Bmatrix}\mathscr{A}_0(x)\mathscr{A}_0(x'), \qquad [10.2]$$

其中

$$\mathscr{A}_0(x)=\begin{cases}1 & x\in V\\ 0 & x\notin V\end{cases}.$$

量$\mathscr{A}_0(x)$类似于电动力学势．直观地说，这些电荷涨落的产生是由于一对粒子由产生而又湮没的自发涨落．

那么,

$$\langle Q_V^2\rangle_0=\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int \mathscr{A}_0(p)\mathscr{A}_0(-p)\begin{Bmatrix}\hat{K}_{00}(p)\\ \hat{L}_{00}(p)\end{Bmatrix}\mathrm{d}^4p,$$

式中

$$\mathscr{A}_0(p)=\int\exp[-ipx]\mathscr{A}_0(x)\mathrm{d}^4x.$$

注: 海森伯[1]首先研究了这个问题.

如果时-空区域是锐确定的, 则场强度 $\partial\mathscr{A}_0/\partial x^\mu$ 有 δ 函数奇点,且积分发散.

变态:令

$$\mathscr{A}_0(x)=\mathscr{A}_0'(t)\cdot\mathscr{A}_0''(\boldsymbol{x}),$$

其中

$$\mathscr{A}_0'(t)=\begin{cases}1 & |t|\leqslant T\\ 0 & |t|>T\end{cases},$$

$$\mathscr{A}_0''(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1 & 0\leqslant|\boldsymbol{x}|\leqslant R\\ \exp[-\lambda(|\boldsymbol{x}|-R)] & |\boldsymbol{x}|\geqslant R,\ \lambda\equiv\dfrac{1}{b}.\end{cases}$$

直观上, 这意思是以具有对应权重因数的三维区域代替二维区域测量力通量:

$$\oint E_n\mathrm{d}f\longrightarrow\int_{r>R}g(r)E_r\mathrm{d}^3x.$$

于是,

$$\mathscr{A}_0(p)=\lambda\frac{\sin p_0T}{p_0}\cdot\frac{1}{p^2}\left[\frac{1}{p}\left(\frac{\lambda+Rp^2}{\lambda^2+p^2}+\frac{2\lambda p^2}{(\lambda^2+p^2)^2}\right)\sin pR\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1-\lambda R}{\lambda^2+p^2}+\frac{p^2-\lambda^2}{(p^2+\lambda^2)^2}\right)\cos pR\right].$$

估计: 因 $\lambda\gg1/T\sim1/R\gg m$, 即 $b\ll T\sim R\ll1/m$, 得:

---

① W. HEISENBERG, *Ber. sächs. Akad. Wiss.*, p 317(1934).

$$\langle Q_V^2\rangle_0 \sim e^2 R^2 \log\frac{R}{b} \qquad \text{(对于两种自旋值)}. \qquad [10.3]$$

(另一方面，海森伯考虑了 $T \ll b \ll R \ll 1/m$ 的情况).

§11. "费因"核 $K^c_{\mu\nu}$ 和 $L^c_{\mu\nu}$

我们有

$$K^c_{\mu\nu}(p) = 4\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int \frac{1}{k^2+m^2-i\mu^2}\cdot\frac{1}{(k-p)^2+m^2-i\mu^2}$$
$$\cdot[-k_\mu(p-k)_\nu - k_\nu(p-k)_\mu - \delta_{\mu\nu}(-(p-k)_\lambda k_\lambda + m^2)]\mathrm{d}^4k$$

[11.1]

$$K^c_{\mu\nu}(p) = \hat{K}_{\mu\nu}(p) + i\bar{K}_{\mu\nu}(p) \quad \text{(形式上!)}.$$

由于

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{d}u}{\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}u\right)^2} \qquad \text{(根据费因曼①)}. \qquad [11.2]$$

得:

$$K^c_{\mu\nu}(p) = 4\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\cdot\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4k\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}u$$
$$\cdot\frac{-k_\mu(p-k)_\nu - k_\nu(p-k)_\mu - \delta_{\mu\nu}(-(p-k)_\lambda k_\lambda + m^2)}{[(k(k-p)) + \frac{1}{2}p^2 + m^2 - i\mu^2 + ((kp) - \frac{1}{2}p^2)u]^2}.$$

为了在分母中完成自乘，而引入下列置换:

$$k_\nu = K_\nu + \frac{1}{2}p_\nu(1-u),$$

$$k_\nu - p_\nu = K_\nu - \frac{1}{2}p_\nu(1+u).$$

实际上，只有当整个表达式是规则化时，这种置换才是允许的. 于是:

---

① R. P. FEYNMAN, *Phys. Rev.* 76, 769(1949); 附录.

分母：$K^2+\frac{1}{4}p^2(1-u^2)+m^2-i\mu^2$,

分子：$2K_\mu K_\nu-\frac{1}{2}p_\mu p_\nu(1-u^2)-\delta_{\mu\nu}\left[K^2-\frac{1}{4}p^2(1-u^2)+m^2\right]$

加上没有贡献的 K_μ 的线性项，同样可根据对称性来确定. 严格地说，也只有在规则化条件下，这才是正确的.

现将 $K^C_{\mu\nu}$ 分解：

$$K^C_{\mu\nu}=(K^C_{\mu\nu})_I+(K^C_{\mu\nu})_{II},$$

其中

$$(K^C_{\mu\nu})_I=4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}u\int\mathrm{d}^4K\cdot\frac{2K_\mu K_\nu-\delta_{\mu\nu}\left(K^2+\frac{1}{4}p^2(1-u^2)+m^2\right)}{\left[K^2+\frac{1}{4}p^2(1-u^2)+m^2-i\mu^2\right]^2},$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}u\int\mathrm{d}^4K\left(\frac{2K_\mu K_\nu}{N^2}-\frac{\delta_{\mu\nu}}{N}\right),$$

和

$$N\equiv K^2+\frac{1}{4}p^2(1-u^2)+m^2-i\mu^2.$$

这里，我们忽略了分子中含 μ^2 的一项，当 $\mu\to0$ 的极限情况下，这是正确的.

我们将指出，不是规范不变式的 $(K^C_{\mu\nu})_I$ 项在规则化时为零(光子自具能)，$(K^C_{\mu\nu})_{II}$ 是规范不变式：

$$(K^C_{\mu\nu})_{II}=-(p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}p^2)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int_{-1}^{+1}(1-u^2)\mathrm{d}u\int\frac{\mathrm{d}^4K}{N^2}.$$

利用对于 u 的部分积分，一种新的组合是：

$$(K^C_{\mu\nu})_{II}=(K^C_{\mu\nu})_{IIa}+(K^C_{\mu\nu})_{IIb},$$

$$(K^C_{\mu\nu})_{IIa}=-(p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}p^2)\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int\frac{\mathrm{d}^4K}{(K^2+m^2-i\mu^2)^2}.$$

[11.3]

$(K^c_{\mu\nu})_{IIa}$是自具电荷，这由下述可以看出．外场的电流是：

$$j^{\mu(a)}(x)=\frac{\partial F^{\text{ext}}_{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=\frac{\partial^2\mathscr{A}_\nu}{\partial x^\mu\partial x^\nu}-\Box\mathscr{A}_\mu.$$

在动量空间中，

$$j^{\mu(a)}(x)\sim(p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}p^2)\mathscr{A}_\nu(p).$$

但是，感生电流是 $K_{\mu\nu}(p)\mathscr{A}(p)$；因此，若

$$K_{\mu\nu}(p)=\text{常数}\cdot(p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}p^2),$$

于是这具有自具电荷的意义．

留下的积分是正规的：

$$(K^c_{\mu\nu})_{IIb}=+p^2(p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}p^2)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int_{-1}^{+1}\left(u^2-\frac{u^4}{3}\right)\mathrm{d}u\int\frac{1}{N^3}\mathrm{d}^4K \qquad [11.4]$$

按照费因曼，下式是正确的．若 $\mathrm{Im}L>0$，则

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\frac{\mathrm{d}^4K}{(K^2-L)^3}=-\frac{i}{8L} \qquad [11.5]$$

（当 $\mathrm{Im}L<0$ 时，这变为 $+i/8L$）．于是，

$$(K^c_{\mu\nu})_{IIb}=+(p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}p^2)p^2\cdot\frac{i}{8}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-1}^{+1}\frac{u^2-\dfrac{u^4}{3}}{\dfrac{1}{4}p^2(1-u^2)+m^2-i\mu^2}\mathrm{d}u \qquad [11.6]$$

$$(\bar{K}_{\mu\nu})_{\text{reg}}=+(p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}p^2)p^2\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\mathscr{P}\int_{-1}^{+1}\frac{u^2-\dfrac{u^4}{3}}{\dfrac{1}{4}p^2(1-u^2)+m^2}\mathrm{d}u \qquad [11.7]$$

类似地，利用方程[11.2]得，

$$L^c_{\mu\nu}(p)=-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int\mathrm{d}^4kM_{\mu\nu}\cdot[(k^2+m^2-i\mu^2)$$

$$((k-p)^2+m^2-i\mu^2)]^{-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int d^4k\int_{-1}^{+1}duM_{\mu\nu}\cdot\left[k(k-p)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}p^2+m^2-i\mu^2+\left(kp-\frac{1}{2}p^2\right)u\right]^{-2},$$

其中

$$M_{\mu\nu}=-k_\mu(p-k)_\nu-k_\nu(p-k)_\mu+k_\mu k_\nu+(p-k)_\mu(p-k)_\nu$$
$$-\delta_{\mu\nu}(k^2+2m^2+(p-k)^2).$$

因为 $k_\nu=K_\nu+\frac{1}{2}p_\nu(1-u)$，分子成为

$$M_{\mu\nu}=4K_\mu K_\nu+p_\mu p_\nu u^2-\delta_{\mu\nu}\left(2K^2+\frac{1}{2}p^2(1+u^2)+2m^2\right)+K_\mu$$

的线性项，而分母与 $K^c_{\mu\nu}$ 中的相同. 作与前面完全相同的计算得：

$$L^c_{\mu\nu}(p)=-\frac{1}{2}(K^c_{\mu\nu}(p))_I+\frac{1}{4}(K^c_{\mu\nu}(p))_{IIa}+(L^c_{\mu\nu})_{reg} \qquad [11.8]$$

非规范不变项能够补偿；自具电荷决不能补偿.

$$(L^c_{\mu\nu}(p))_{reg}=-\frac{i}{16}(p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}\cdot p^2)\cdot p^2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\frac{1}{3}u^4}{\frac{1}{4}p^2(1-u^2)+m^2-i\mu^2}du \qquad [11.9]$$

$$(\bar{L}_{\mu\nu}(p))_{reg}=-\frac{1}{16}(p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}p^2)p^2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2$$

$$\mathscr{P}\int_{-1}^{+1}\frac{\frac{1}{3}u^4}{\frac{1}{4}p^2(1-u^2)+m^2}du \qquad [11.10]$$

发现 K^c 和 L^c 的实部，即 $\hat{K}$ 和 $\hat{L}$ 好象留数：

实部$=i\pi\times$留数(约斯特和卢丁格①)
仅当分母的零点在 0 与 1 之间时；即若

$$0<\frac{p^2+4m^2}{p^2}<1,$$

或若

$$p^2<-4m^2$$

才有贡献. 在这种情况下，对于自旋为$\frac{1}{2}$的粒子，在

$$u^2=(p^2+4m^2)/p^2$$

时的留数是：

$$\frac{u^2-\frac{1}{3}u^4}{-\frac{1}{2}p^2u}=-\frac{2}{p^2}u\left(1-\frac{u^2}{3}\right)=-\frac{2}{p^2}\cdot\frac{2p^2-4m^2}{3p^2}\sqrt{\frac{p^2+4m^2}{p^2}}.$$

于是，如前所述：

$$\hat{K}_{\mu\nu}(p)=\begin{cases}(p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}p^2)\ \dfrac{\pi}{2\pi^2}\cdot\dfrac{p^2-2m^2}{3p^2}\sqrt{\dfrac{p^2+4m^2}{p^2}}, & p^2<-4m^2.\\ 0, & \text{除上述情况外}.\end{cases}$$

[11. 11]

$$\hat{L}_{\mu\nu}(p)=\begin{cases}\dfrac{1}{16}(p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}p^2)\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^2\cdot\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{p^2+4m^2}{p^2}\right), & p^2<-4m^2,\\ 0. & \text{除上述情况外}.\end{cases}$$

[11. 12]

奇异项的讨论

因

$$N\equiv k^2+\frac{1}{2}p^2(1-u^2)+m^2-i\mu^2,$$

我们有(参看本节前述)

① R. JOST and J. M. LUTTINGER, *Helv. Phys. Acta* **23**, 201(1950).

$$(K^{C}_{\mu\nu})_{I}=2\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{4}\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}u\int\left(\frac{2k_{\mu}k_{\nu}}{N^{2}}-\frac{\delta_{\mu\nu}}{N}\right)\mathrm{d}^{4}k, \qquad [11.13]$$

和

$$(K^{C}_{\mu\nu})_{IIa}=-(p_{\mu}p_{\nu}-\delta_{\mu\nu}p^{2})\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{4}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}^{4}k}{(k^{2}+m^{2}-i\mu^{2})^{2}}. \qquad [11.14]$$

在这种形式中，积分是不定的．我们进行规则化：

$$(\widetilde{K}^{C}_{\mu\nu})_{I}\equiv\sum_{i=0}^{N}C_{i}K_{\mu\nu}(p;M_{i})_{I};\quad C_{0}=1,\ M_{0}=m,$$

$$(\widetilde{K}^{C}_{\mu\nu})_{IIa}\equiv\sum_{i=0}^{N}C_{i}K_{\mu\nu}(p;M_{i})_{IIa}.$$

为了使积分有限，必须满足：

对于 I: $\sum_{i=0}^{N}C_{i}=0$;　$\sum_{i=0}^{N}C_{i}M_{i}^{2}=0$，所以积分为零；

对于 IIa: $\sum_{i=0}^{N}C_{i}=0$ 于是积分由 $\sum_{i=1}^{N}C_{i}\log(M_{i}/m)$确定．

1．自具电荷，$(K^{C}_{\mu\nu})_{IIa}$: 只须一个辅助质量 $M_{1}\equiv M$ 就足够了．因为$\alpha\equiv e^{2}/4\pi\simeq 1/137$，得：

$$\frac{\delta e}{e}=\frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{m^{2}}{M^{2}}=\frac{2\alpha}{3\pi}\log\frac{m}{M}<0 \qquad (\text{许温格①}). \qquad [11.15]$$

注：在费因曼-戴逊形式中，δe 是根据散射过程定义的，δe 只有一半大（如何解释呢？）[A-2]．

让我们来进行计算．我们有方程[11.5]，

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2}\int\frac{\mathrm{d}^{4}k}{(k^{2}-L)^{3}}=\frac{-i}{8L} \qquad (\mathrm{Im}L>0).$$

于是

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2}\int\left[\frac{1}{(k^{2}-L_{2})^{2}}-\frac{1}{(k^{2}-L_{1})^{2}}\right]\mathrm{d}^{4}k=\frac{-i}{8}\log\frac{L_{2}}{L_{1}}. \qquad [11.16]$$

① J. SCHWINGER, *Phys. Rev.* 75, 651(1949).

这对应于具有一个辅助质量的情况. 更一般地说,

$$\sum_{i=0}^{N-1} C_i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{(k^2-L_N)^2} - \frac{1}{(k^2-L_i)^2}\right] \mathrm{d}^4 k = -\frac{i}{8} \sum_{i=0}^{N-1} C_i \log \frac{L_N}{L_i}.$$

我们有 $\sum_{i=0}^{N-1} C_i = -C_N$, 因为 $\sum_{i=0}^{N} C_i = 0$. 因此, 对应于方程[11.16], 得:

$$-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \int \left[\sum_{i=0}^{N} \frac{C_i}{(k^2-L_i)^2}\right] \mathrm{d}^4 k = \frac{i}{8} \sum_{i=0}^{N} C_i \log L_i. \quad [11.17]$$

由此, 得到许温格值.

2. 光子自具能: 我们有

$$(K_{\mu\nu}^{c})_I = 2 \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}u \int \left[\frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2-L)^2} - \delta_{\mu\nu} \frac{1}{k^2-L}\right] \mathrm{d}^4 k,$$

其中

$$L = -\frac{1}{4} p^2 (1-u^2) - m^2 + i\mu^2.$$

必须指出, 在规则化时这为零. 首先, 我们有:

$$\int \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-L)^4} \mathrm{d}^4 k = \delta_{\mu\nu} \cdot \frac{1}{4} \int \frac{k^2}{(k^2-L)^4} \mathrm{d}^4 k$$

$$= \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \left\{ \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(k^2-L)^3} + L \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(k^2-L)^4} \right\}.$$

由

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int (k^2-L)^{-3} \mathrm{d}^4 k = \frac{-i}{8L} \qquad (\mathrm{Im} L > 0)$$

对 L 求导得:

$$3\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(k^2-L)^4} = +\frac{i}{8L^2}.$$

于是,

$$\int \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-L)^4} \mathrm{d}^4 k = \frac{1}{6}\delta_{\mu\nu} \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(k^2-L)^3},$$

或

$$\int \left[\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-L)^4} - \frac{1}{6}\delta_{\mu\nu} \frac{1}{(k^2-L)^3} \right] \mathrm{d}^4 k = 0.$$

若令其对 L 积分两次,正好得到我们所想要的结果:乘 $\mathrm{d}L$,并在 L_1 和 L_2 之间求积分:

$$\frac{1}{3}\int \left[\frac{1}{2}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-L)^3} - \delta_{\mu\nu} \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{(k^2-L)^2} \right] \mathrm{d}^4 k \Bigg|_{L_1}^{L_2} = 0.$$

(如果对 k 积分在最后进行, 这是正确的.)就是说,若 $\sum\limits_i C_i = 0$,则有

$$\int \sum_i C_i f(L_i, k) \mathrm{d}^4 k = 0,$$

其中

$$f(L_i, k) \equiv \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-L_i)^3} - \delta_{\mu\nu} \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{(k^2-L_i)^2}.$$

令

$$F(L, k) \equiv \frac{1}{2}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-L)^2} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu} \frac{1}{k^2-L}.$$

于是

$$f = \frac{\partial F}{\partial L}.$$

更一般地,我们能够陈述如下:令

$$\int [f(k, L) - f(k, L_1)] \mathrm{d}^4 k = 0.$$

则

$$\int \mathrm{d}^4 k \int_{L_1}^{L_2} [f(k, L) - f(k, L_1)] \mathrm{d}L = 0,$$

或 $$\int [F(k, L_2) - F(k, L_1) - (L_2 - L_1) f(k, L_1)] \mathrm{d}^4 k = 0.$$

如果 $\sum_i C_i = 0$, 则更一般地有

$$\int \sum_i C_i [F(k, L_i) - L_i f(k, L_1)] \mathrm{d}^4 k = 0.$$

此外，如果 $\sum_i C_i L_i = 0$, 则

$$\int \sum_i C_i F(k, L_i) \mathrm{d}^4 k = 0.$$

证毕.

一般地说，这种对质量的积分方法是很有效的.

因为我们有

$$L_i \equiv -\frac{1}{4} p^2 (1 - u^2) + i\mu^2 - M_i^{\ 2}.$$

于是，$\sum_i C_i = 0$ 和 $\sum_i C_i L_i = 0$ 是与 $\sum_i C_i = 0$ 和 $\sum_i C_i M_i^2 = 0$ 等价的. 因此，可以证明，当用 $\sum_i C_i = 0$ 和 $\sum_i C_i M_i^{\ 2} = 0$ 进行规则化时，$(K_{\mu\nu}^C)_I$ 为零.

§ 12. 消去自具电荷的不可能性①

我们规定：若 e_0 是裸电荷，e 是物理电荷，$\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$ 是精细结构常数，以及

$$\frac{e}{e_0} = \frac{1}{1 + F(\alpha)}, \tag{12.1}$$

则

即，
$$\left.\begin{aligned} &F(\alpha) > 0; \\ &0 < \frac{e}{e_0} < 1. \end{aligned}\right\} \tag{12.2}$$

① J. SCHWINGER, *Phys. Rev.* 76, 790(1949); 附录.

是正确的.

注: 1. 我们知道这种规定下的一级近似(关于 α): 在一级近似中, $\delta e = -eF(\alpha)$ 是负的.

2. 这个问题与洛伦兹不变性无关; 可以利用正则形式. 那么在海森伯表象中, 因 $\dot{F} \equiv \frac{\partial F}{\partial t}$,

$$[\Phi_\mu(x, t), \dot{\Phi}_\nu(x', t)] = i\delta_{\mu\nu}\delta^3(x-x'). \qquad [12.3]$$

这是严格正确的, 其理由是相互作用能量只与势有关, 而与场强度无关. 如果有了泡利项[A-3]这将不再是正确的了.

令 Φ_μ 是下述相互作用场方程式的一个严格解:

$$\Box\Phi_\mu = -j^\mu.$$

命 $\Phi_\mu^{(0)} = \lim_{\alpha\to 0} \Phi_\mu$; 即 $\Box\Phi_\mu^{(0)} = 0$. 则方程[12.3] 对 $\Phi_\mu^{(0)}$ 和 Φ_μ 都是正确的. 那么, 我们能够写作:

$$\Phi_\mu = \gamma\Phi_\mu^{(0)} + \Phi_\mu^{(1)}, \qquad [12.4]$$

其中 $\Phi_\mu^{(1)}$ 或者改变(a)实物粒子的对偶数, (b)三个或三个以上的光子数, 或者(c)上述两种情况都改变.

于是,

$$\left.\begin{aligned} \langle\Phi_\mu^{(0)}(x, t)\Phi_\nu^{(1)}(x', t')\rangle_0 = 0 \\ \langle\Phi_\mu^{(0)}(x, t)\Phi_\nu^{(1)}(x', t')\rangle_0 = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad [12.5]$$

则因 $\gamma = e/e_0$,

$$\langle[\Phi_\mu(x, t), \dot{\Phi}_\mu(x, t)]\rangle_0 = \gamma^2\langle[\Phi_\mu^{(0)}(x, t), \dot{\Phi}_\mu^{(0)}(x', t)]\rangle_0 + \langle[\Phi_\mu^{(1)}(x, t), \dot{\Phi}_\mu^{(1)}(x', t)]\rangle_0$$

(不对 μ 求和),

这意思是:

$$(1-\gamma^2)\delta^3(x-x') = -i\langle[\Phi_\mu^{(1)}(x, t), \dot{\Phi}_\mu^{(1)}(x', t)]\rangle_0.$$

当在盒中有一个简正模(r)时,

$$1-\gamma^2 = -i\langle[\Phi_\mu^{(1)}(k_r, t), \dot{\Phi}_\mu^{(1)}(k_r, t)]\rangle_0. \qquad [12.6]$$

规定: 右边是正的. 我们有,

$$\dot{\Phi}^{(1)}=+i[H,\Phi^{(1)}].$$

于是

$$1-\gamma^2=+\langle[\Phi^{(1)},[H,\Phi^{(1)}]]\rangle_0,$$

$$1-\gamma^2=+\langle\Psi_0|2\Phi^{(1)}H\Phi^{(1)}-\Phi^{(1)}\Phi^{(1)}H-H\Phi^{(1)}\Phi^{(1)}|\Psi_0\rangle.$$

由于 $H\Psi_0=E_0\Psi_0$ 和 H 的厄密性,

$$1-\gamma^2=2(\Phi^{(1)}\Psi_0,H\Phi^{(1)}\Psi_0)-2(\Phi^{(1)}\Psi_0,E_0\Phi^{(1)}\Psi_0),$$

[12.7]

$$1-\gamma^2=2(\Phi^{(1)}\Psi_0,(H-E_0)\Phi^{(1)}\Psi_0).$$

若 Ψ_0 是最低能量状态,则这是正的. 证毕.

注: 1. H 的厄密性是本质的.

2. 对于有负能的理论,这种证明是不正确的(波普和史塔开尔堡[1]),因为对所有 Ψ,有 $(\Psi^*(H-E_0)\Psi)\geqslant 0$.

---

[1] F. BOPP, *Ann. Physik* 38, 345(1940); E. C. G. STUECKELBERG, *Nature* 144, 118(1939).

第三章 自由场的量子化：自旋为 0 和$\frac{1}{2}$的量子电动力学

§ 13. 不变函数[A-4]

齐次波动方程是

$$(\Box - m^2)\Delta = 0. \qquad [13.1]$$

我们将这方程的解记作 $\Delta(x) \equiv \Delta(\boldsymbol{x}, t)$，在 $t=0$ 时，相应的初始条件为：

$$\Delta(\boldsymbol{x}, 0) = 0$$

和

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{x}, 0} = -\delta^3(\boldsymbol{x}).$$

考虑到

$$\delta^3(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}] \mathrm{d}^3k,$$

则容易得出 $\Delta(x)$的傅里叶表示是:

$$\Delta(x) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{\sin(\omega x_0)}{\omega} \exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}] \mathrm{d}^3k \left(\omega \equiv \sqrt[+]{\boldsymbol{k}^2 + m^2}\right).$$

于是，

$$\Delta(x) = -i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \exp[i(kx)] e(k) \delta(k^2 + m^2) \mathrm{d}^4k, \qquad [13.2]$$

其中

$$\varepsilon(x)\equiv\varepsilon(t)=\begin{cases}+1 & (t>0)\\ -1 & (t<0),\\ \text{不确定} & (t=0)\end{cases}$$

和

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=2\delta(t).$$

于是，

$$\Delta(\boldsymbol{x},-t)=-\Delta(\boldsymbol{x},t),\quad \Delta(-\boldsymbol{x},t)=+\Delta(\boldsymbol{x},t),$$

和

$$\Delta(-x)=-\Delta(x). \qquad [13.3]$$

利用傅里叶分解，我们能够确定方程[13.1]的一个附加的不变式解：

$$\Delta^1(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\exp[i(kx)]\delta(k^2+m^2)\mathrm{d}^4k, \qquad [13.4]$$

或，

$$\Delta^1(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\frac{\cos\omega x_0}{\omega}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}.$$

因 $\Delta(x)$函数表示的提早势和推迟势关系式是：

$$\Delta^{\mathrm{ret}}(x)=\begin{cases}-\Delta(x) & (t>0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}; \quad \Delta^{\mathrm{ret}}(x)=-\frac{1+\varepsilon(x)}{2}\Delta(x),$$

$$\Delta^{\mathrm{adv}}(x)=\begin{cases}0 & (t>0)\\ \Delta(x) & (t<0)\end{cases}; \quad \Delta^{\mathrm{adv}}(x)=+\frac{1-\varepsilon(x)}{2}\Delta(x).$$

我们有

$$(\Box-m^2)\Delta^{\mathrm{ret}}(x)=-\delta^4(x),$$

$$(\Box-m^2)\Delta^{\mathrm{adv}}(x)=-\delta^4(x),$$

和

$$\left.\begin{aligned}&\Delta=\Delta^{\mathrm{adv}}-\Delta^{\mathrm{ret}}\\ &\bar{\Delta}=\frac{1}{2}(\Delta^{\mathrm{adv}}+\Delta^{\mathrm{ret}});\ \bar{\Delta}(x)=-\frac{1}{2}\varepsilon(x)\Delta(x)\end{aligned}\right\}. \qquad [13.5]$$

$\overline{\Delta}(x)=-\frac{1}{2}\varepsilon(x)\Delta(x)$的傅里叶表式是:

$$\overline{\Delta}(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\mathscr{P}\int\frac{\exp[i(kx)]}{k^2+m^2}\mathrm{d}^4k, \qquad [13.6]$$

其中$\mathscr{P}$表示对k_0积分的主值. 事实上,可以立即看出$\overline{\Delta}(x)$满足下述微分方程:

$$(\Box-m^2)\overline{\Delta}(x)=-\delta^4(x),$$

而且,具有正确的对称性质. 这足以确定$\overline{\Delta}$.

正如由三维动量空间中的表达式立即得到的那样,用

$$\left.\begin{aligned}\Delta^+&=\frac{1}{2}(\Delta-i\Delta^1)\\ \Delta^-&=\frac{1}{2}(\Delta+i\Delta^1)\end{aligned}\right\}, \qquad [13.7]$$

可以得出按正频率和负频率的分解式.

a. k_0复平面中的路线积分表式:

$$\Delta^{\text{ret}}(x)\equiv\overline{\Delta}(x)-\frac{1}{2}\Delta(x)$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int\left\{\mathscr{P}\frac{1}{k^2+m^2}+i\pi\delta(k^2+m^2)\varepsilon(k)\right\}\exp[i(kx)]\mathrm{d}^4k,$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{\text{ret}}&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int_{\Gamma_+}\frac{\exp[i(kx)]}{k^2+m^2}\mathrm{d}^4k\\ \Delta^{\text{adv}}&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int_{\Gamma_-}\frac{\exp[i(kx)]}{k^2+m^2}\mathrm{d}^4k\end{aligned}\right\}. \qquad [13.8]$$

(见图 13.1)

函数Δ^C定义为:

$$\Delta^C\equiv-2i\overline{\Delta}+\Delta^1, \qquad [13.9]$$

$$(\Box-m^2)\Delta^C=+2i\delta^4(x).$$

我们有

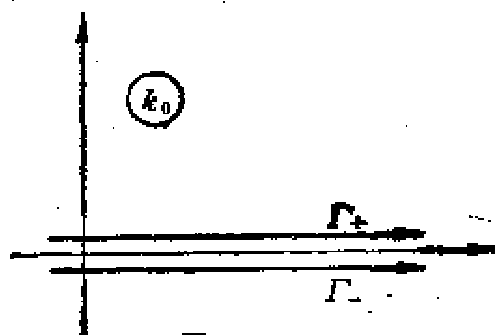


图 13.1

$$\Delta^c(x)=\frac{-2i}{(2\pi)^4}\int\exp[i(kx)]\left[\mathscr{P}\frac{1}{k^2+m^2}+i\pi\delta(k^2+m^2)\right]d^4k.$$

由

$$\left.\begin{aligned}\delta_+(z)&\equiv\frac{1}{2}\left[\delta(z)+\mathscr{P}\frac{1}{i\pi z}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\exp[-i\nu z]d\nu\\ \delta_-(z)&\equiv\frac{1}{2}\left[\delta(z)-\mathscr{P}\frac{1}{i\pi z}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0\exp[-i\nu z]d\nu\end{aligned}\right\},\qquad [13.10]$$

得

$$\Delta^c(x)=\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int\exp[i(kx)]\delta_+(k^2+m^2)d^4k \qquad [13.11]$$

用复平面中的路线积分(见图 13.2)表作:

$$\Delta^c(x)=\frac{-2i}{(2\pi)^4}\int_C\frac{\exp[i(kx)]}{k^2+m^2}d^4k. \qquad [13.12]$$

b. Δ^c 用正频率和负频率的分解法(费尔兹①)

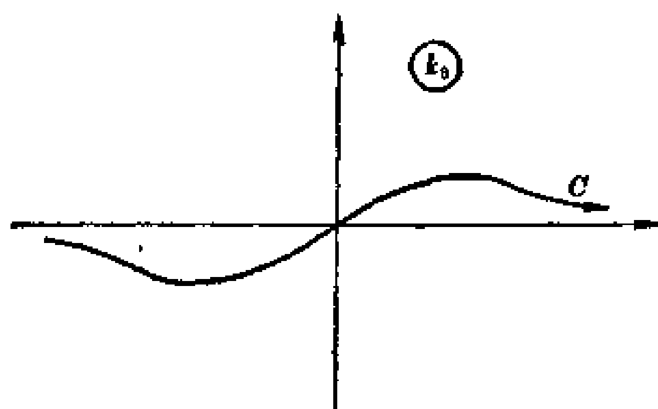


图 13.2

$$\left.\begin{aligned}(\Delta^c)^+&=\frac{-2i}{(2\pi)^4}\int_{C_+}\frac{\exp[i(kx)]}{k^2+m^2}d^4k\\ (\Delta^c)^-&=\frac{-2i}{(2\pi)^4}\int_{C_-}\frac{\exp[i(kx)]}{k^2+m^2}d^4k\end{aligned}\right\}. \qquad [13.13]$$

(见图 13.3),于是,

① M. FIERZ, *Helv. Phys. Acta* **23**, 731(1950).

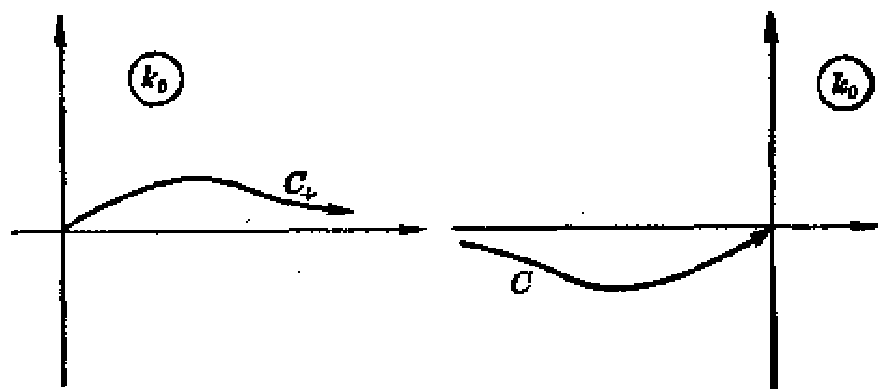


图 13.3

$$\left.\begin{aligned}(\Delta^C)^+ &= -2i(\Delta^{ret})^+\\ (\Delta^C)^- &= -2i(\Delta^{adv})^-\end{aligned}\right\}, \tag{13.14}$$

(Δ^C 函数的费尔兹分解法；见 § 27)．

$$\Delta^C = -2i[(\Delta^{ret})^+ + (\Delta^{adv})^-]. \tag{13.15}$$

源的对应分解为：

$$\left.\begin{aligned}(\Box - m^2)(\Delta^C)^+ &= +2i\delta^3(x)\delta_+(t)\\ (\Box - m^2)(\Delta^C)^- &= +2i\delta^3(x)\delta_-(t)\end{aligned}\right\}. \tag{13.16}$$

这就是说，Δ^C 的费尔兹分解法对应于按正频率和负频率的源分解法．

c．Δ^C 的费因曼分解法

这是按正时和负时的分解法：

$$\Delta^C(x) = i\varepsilon(x)\Delta(x) + \Delta^1(x),$$

所以，

$$t>0,\ \ \Delta^C = i\Delta + \Delta^1 = 2i\Delta^+,$$
$$t<0,\ \ \Delta^C = -i\Delta + \Delta^1 = -2i\Delta^-,$$

或，

$$\Delta^C = 2i(\Delta^+)^{ret} - 2i(\Delta^-)^{adv}.$$

注：这不是按频率正负的一种频率分解法：

$$(\Delta^+)^{ret} \neq (\Delta^{ret})^+.$$

d. 补遗

对于零质量 $m=0$ 的特殊情况:

$D(x)=\Delta(x)|_{m=0}$, 等,

$$\left.\begin{array}{l}\Box D(x)=0\\ \Box D^{1}(x)=0\\ \Box \bar{D}(x)=-\delta^{4}(x)\end{array}\right\}.$$

则 D 函数的显式可以写作:

$$\left.\begin{array}{l}D^{\mathrm{ret}}(x)=\dfrac{1}{4\pi r}\delta(t-r);\ r\equiv|\boldsymbol{x}|\\ D^{\mathrm{adv}}(x)=\dfrac{1}{4\pi r}\delta(t+r)\end{array}\right\}, \qquad [13.17]$$

$$D(x)=D^{\mathrm{adv}}(x)-D^{\mathrm{ret}}(x),$$

$$\bar{D}(x)=\frac{1}{2}(D^{\mathrm{adv}}(x)+D^{\mathrm{ret}}(x)).$$

这样,

$$\left.\begin{array}{l}D(x)=\dfrac{1}{4\pi r}[\delta(t+r)-\delta(t-r)]\\ \bar{D}(x)=\dfrac{1}{8\pi r}[\delta(t+r)+\delta(t-r)]\end{array}\right\}, \qquad [13.18]$$

和

$$(D^{\mathrm{ret}})^{+}(x)=\frac{1}{4\pi r}\delta_{+}(t-r),$$

$$(D^{\mathrm{adv}})^{-}(x)=\frac{1}{4\pi r}\delta_{-}(t+r),$$

$$D^{C}=-2i[(D^{\mathrm{ret}})^{+}+(D^{\mathrm{adv}})^{-}],$$

$$=\frac{-2i}{8\pi r}\left[\delta(t-r)+\mathscr{P}\frac{1}{i\pi(t-r)}+\delta(t+r)-\mathscr{P}\frac{1}{i\pi(t+r)}\right]$$

$$=-2i\bar{D}-\frac{2i}{8\pi r}\mathscr{P}\frac{2r}{i\pi(t^{2}-r^{2})},$$

$$D^C=-2i\tilde{D}+\frac{1}{2\pi^2}\mathscr{P}\frac{1}{r^2-t^2},$$

$$D^C=-2i\tilde{D}+D^1,$$

其中

$$D^1(x)=\mathscr{P}\frac{1}{2\pi^2(r^2-t^2)}. \qquad [13.19]$$

注：当 $m\neq0$ 时，同样的这些表达式只表示所讨论的函数中有较强奇点的部分；然而，在那种情况下，也有较弱奇点的附加项（Δ^1 中的对数项，Δ 和 $\bar{\Delta}$ 中的不连续项）。这些附加项也可写成显式（参见许温格①）。

§ 14. 自旋为零的不带电自由场的量子化[A-4]

令 $\Phi(x)$ 表示实标量场：

$$(\Box-m^2)\Phi(x)=0. \qquad [14.1]$$

在大体积 V 内，

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\substack{k\\ k_0>0}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}[A_k\exp[i(kx)]+A_k^*\exp[-i(kx)]]. \qquad [14.2]$$

这里，必须对所有 k 值求和；频率始终必须取正值：

$$k_0=+\omega=+\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2},$$

$$(kx)\equiv\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t.$$

当体积变换到 $V\to\infty$ 时，必须写作：

$$\frac{1}{V}\sum_{k}\cdots\to\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\cdots d^3k, \quad A_k\to A(k).$$

对易关系式

$$[A_k, A_l^*]=\delta_{kl}$$

保持有效。于是，

---

① J. SCHWINGER, *Phys. Rev.* 75, 651(1949).

$$A_k^* A_k = N_k \qquad (\text{本征值为 } 0, 1, 2, \cdots),$$

而且，A_k 为吸收或湮没算符，而 A_k^* 为发射或产生算符：

$$\left.\begin{aligned} A\Psi(N) &= \sqrt{N}\Psi(N-1) \\ A^*\Psi(N) &= \sqrt{N+1}\Psi(N+1) \end{aligned}\right\}.$$

对于真空，

$$\left.\begin{aligned} \langle A^* A\rangle_0 &= 0 \\ \langle AA^*\rangle_0 &= 1 \end{aligned}\right\},$$

所以，用 § 9 的记号，得：

$$\left.\begin{aligned} [\Phi(x), \Phi(x')] &= i\Delta(x-x') \\ \langle\{\Phi(x), \Phi(x')\}\rangle_0 &= \Delta^{(1)}(x-x') \end{aligned}\right\}. \qquad [14.3]$$

正则形式

用拉格朗日函数：

$$L = \int \mathscr{L} \mathrm{d}^3 x, \qquad [14.4]$$

式中

$$-\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}\frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} + m^2\Phi^2\right], \qquad [14.5]$$

则场方程式可由变分原理得到：

$$\delta\int L \mathrm{d}t = 0. \qquad [14.6]$$

方程[14.5]可以写作：

$$2\mathscr{L} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 - m^2\Phi^2, \qquad [14.7]$$

和力学中一样，我们定义正则共轭动量：

$$\pi(x) \equiv \left(\frac{\delta L}{\delta(\partial\Phi/\partial t)}\right)_\Phi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial\Phi/\partial t)} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad [14.8]$$

并且构成哈密顿函数：

$$H = \int \mathscr{H} \mathrm{d}^3 x, \qquad [14.9]$$

其中

$$\mathscr{H}=\pi\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\mathscr{L}. \qquad [14.10]$$

在这种处理中，也许需要注意因子的次序，于是我们有：

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\left\{\pi^2(x)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+m^2\Phi^2(x)\right\}. \qquad [14.11]$$

进一步利用力学中类似的方法，我们将要求对易关系式：

$$i[\pi(x,t),\Phi(x',t)]=\delta^3(x-x'), \qquad [14.12]$$

而且自然地有：

$$[\pi(x,t),\pi(x',t)]=[\Phi(x,t),\Phi(x',t)]=0, \qquad [14.13]$$

显然，这只对相同时间是正确的. 如果在方程[14.3]中，令 $t=t'$，并注意到 $\pi=\partial\Phi/\partial t$，因为，

$$\Delta(x-x,\ 0)=0,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial t}(x-x',0)=-\delta^3(x-x').$$

则立即可以看出，这些对易关系式和方程[14.3]的不变式一致. 相反，如果用正则形式的场方程，则不变式也可由正则对易关系式得到. 这些正则形式的场方程式由下述关系式得到：

$$\frac{\partial F}{\partial t}=i[H,F]; \qquad [14.14]$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=i[H,\Phi]=\pi,\ \frac{\partial\pi}{\partial t}=i[H,\pi]=\Delta\Phi-m^2\Phi.$$

§ 15. 真空中的量子电动力学

对于实矢量场 Φ_μ，场方程式是：

$$\Box\Phi_\mu=0 \qquad (\text{零质量}). \qquad [15.1]$$

此外，我们还要求下述辅助条件：

$$\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\mu}=0, \qquad [15.2]$$

这是由于，为了使场强

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\nu}\qquad[15.3]$$

得以满足麦克斯韦方程组:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=0.\qquad[15.4]$$

为了量子化,采用与标量场相似的方法,这种方法再次说明是有用的,从而要求:

$$[\Phi_\mu(x),\Phi_\nu(x')]=i\delta_{\mu\nu}D(x-x').\qquad[15.5]$$

这里,出现了一种特性,即,

$$\left[\frac{\partial\Phi_\mu(x)}{\partial x^\mu},\Phi_\nu(x')\right]=i\frac{\partial}{\partial x^\nu}D(x-x')\neq0\qquad[15.6]$$

这就是说,辅助条件与势不能对易,但是,它与场强可以对易:

$$\left[\frac{\partial\Phi_\rho(x)}{\partial x^\rho},F_{\mu\nu}(x')\right]=0,\qquad[15.7]$$

且辅助条件与其本身可对易,

$$\left[\frac{\partial\Phi_\mu(x)}{\partial x^\mu},\frac{\partial\Phi_\nu(x')}{\partial x'^\nu}\right]=i\Box D=0.\qquad[15.8]$$

(这说明,仅当 $m=0$ 时,才能有这样的辅助条件.)

为了消除方程[15.6]的困难,我们采用较弱的要求(根据费密的方案①)

$$\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\mu}\cdot\Psi=0.\qquad[15.9]$$

这就是说,辅助条件不应该是一个算符恒等式,而应该是限制可能的状态.这样的限制有典型的结果.现在我们要来研究这些结果.

为此,我们按本征函数完全集展开,

① E. FERMI, *Rendiconti d. R. Acc. d. Lincei* 9, 881(1929); 12, 431(1930); *Rev. Mod Phys*, 4, 87(1932); Part III.

$$\Phi_\mu(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\sum_{\lambda=1}^{4}e_{\lambda\mu}(\boldsymbol{k})[A_\lambda(\boldsymbol{k})\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})]$$

$$+A_\lambda^*(\boldsymbol{k})\exp[-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})]], \qquad [15.10]$$

式中 $\Phi_4=i\Phi_0$, $\boldsymbol{\Phi}$ 和 Φ_0 是厄密量，且 $\omega=+|\boldsymbol{k}|$. 我们希望:

$$(e_\lambda e_{\lambda'})\equiv\sum_\nu e_{\lambda\nu}e_{\lambda'\nu}=\delta_{\lambda\lambda'}, \qquad [15.11]$$

于是 e_1, e_2, e_3 和 e_4 构成一正交基. 而且

$$\sum_\lambda e_{\lambda\mu}e_{\lambda\nu}=\delta_{\mu\nu}. \qquad [15.12]$$

并非所有的 e_λ 都是实数:

$e_{i\mu}=(\boldsymbol{e}_i, e_{i0})$　是实数　　$i=1, 2, 3$,

$ie_{4\mu}=i(\boldsymbol{e}_4, e_{40})$　是实数.

$e_{\lambda\mu}$ 可用最简单的方式表示如下:

$$\left.\begin{array}{l}(e_3+ie_4)_\mu=f(\omega)\cdot k_\mu\\ (e_1k)=(e_2k)=0\end{array}\right\}. \qquad [15.13]$$

因为

$$\sum_{\mu=1}^{4}k_\mu k_\mu\equiv k^2=0,$$

于是下式也是正确的:

$$\sum_{\mu=1}^{4}(e_3+ie_4)_\mu k_\mu=0.$$

然而

$$\sum_{\mu=1}^{4}(e_3-ie_4)_\mu k_\mu\neq 0.$$

当 $\lambda=1, 2$ 时，可作下述变换:

$$\left.\begin{array}{ll}e'_{\lambda\mu}=e_{\lambda\mu}+\alpha_\lambda k_\mu & (\lambda=1, 2)\\ e'_3=e_3,\ e'_4=e_4 & \end{array}\right\}.$$

因为 $k^2=0$, 所有方程都仍然正确. 作为一个说明，可作下述特殊选择:

$$\boldsymbol{k}_\nu=(0,0,\omega,i\omega),$$
$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0),$$
$$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,0),$$
$$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1,0),$$
$$\boldsymbol{e}_4=(0,0,0,1).$$

辅助条件[15.9]变成

$$\left.\begin{array}{l}(A_3+iA_4)\Psi=0\\(A_3^*+iA_4^*)\Psi=0\end{array}\right\}. \qquad [15.14]$$

(参照下述的方程[15.23].)

厄密性: Φ_ν 的真实性条件要求:

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda=1,2,3\text{ 时}, & A_\lambda^*=A_\lambda\text{ 的厄密共轭}=(A_\lambda)^+\\\lambda=4\text{ 时}, & -A_4^*=A_4\text{ 的厄密共轭}=(A_4)^+\end{array}\right\}. \qquad [15.15]$$

"强"对易关系式是:

$$[A_\lambda(\boldsymbol{k}),A_{\lambda'}^*(\boldsymbol{k}')]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}, \qquad [15.16]$$

其它对易子为零. 若令 $A_4=B^*$, $A_4^*=-B$, 则 B^* 是 B 的厄密共轭: $B^*=B^+$. 此外,

$$[B,B^*]=+1,$$

这是与通常情况相反的. 因此, 如果我们不想引入一个希耳伯空间中的新矩阵, 则必须作新的解释:

$$\begin{cases}A_1,A_2,A_3,A_4^*\text{ 是湮没算符},\\A_1^*,A_2^*,A_3^*,A_4\text{ 是产生算符};\end{cases}$$

$$N_i=A_i^*A_i \qquad i=1,2,3,$$
$$N_4=-A_4A_4^*=B^*B.$$

这些是数字算符, 有本征值 0, 1, 2, …, 于是, 当 $i=1,2,3$ 时,

$$A_i\Psi(N_i)=\sqrt{N_i}\,\Psi(N_i-1),$$

$$A_i^*\Psi(N_i)=\sqrt{N_i+1}\,\Psi(N_i+1).$$

但是，当 $i=4$ 时，

$$A_4\Psi(N_4)=-i\sqrt{N_4+1}\,\Psi(N_4+1),$$

$$A_4^*\Psi(N_4)=-i\sqrt{N_4}\,\Psi(N_4-1).$$

（这里，任意地选择了一个不定相因子.）

为此，辅助条件成为[A-5]:

$$\begin{cases}\sqrt{N_3}\,\Psi(N_3-1,\ N_4)+\sqrt{N_4+1}\,\Psi(N_3,\ N_4+1)=0,\\ \sqrt{N_3+1}\,\Psi(N_3+1,\ N_4)+\sqrt{N_4}\,\Psi(N_3,N_4-1)=0,\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\sqrt{N_3}\,\Psi(N_3-1,\ N_4-1)+\sqrt{N_4}\,\Psi(N_3,N_4)=0,\\ \sqrt{N_4}\,\Psi(N_3-1,\ N_4-1)+\sqrt{N_3}\,\Psi(N_3,N_4)=0.\end{cases}$$

因此，辅助条件联系这样的状态：其中量子数 N_4 之差等于量子数 N_3 之差.

一般解是：

$\Psi(N_3,N_4)=0$　　当 $N_3\neq N_4$ 时，

$\Psi(N,N)=(-1)^N$,

由此得：

$$\sum_N|\Psi(N,N)|^2=\infty;$$

态矢量是不能归一的.

注：这种困难是与真空完全无关的；的确我们完全没有提到真空．我们会看到，它将由下式决定：

$$N_\lambda=A_\lambda^*A_\lambda=0\qquad 当\ \lambda=1,2\ 时.$$

a. 关于“强”对易关系式应注意之点

“强”对易关系式：

$$[A_\lambda(\boldsymbol{k}),\ A_{\lambda'}^*(\boldsymbol{k}')]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\qquad(\lambda,\lambda'=1,\cdots,4),\quad[15.17]$$

的根据是非规范不变量；的确，它们是与下述对易关系式等效的：

$$[\Phi_\mu(x), \Phi_\nu(x')] = i\delta_{\mu\nu} D(x-x'), \qquad [15.18]$$

这是非规范不变量. 即它们在

$$\Phi_\mu' = \Phi_\mu + \frac{\partial F}{\partial x^\mu}$$

变换下不是不变量. 对于 F, 有$\Box F=0$, 只要F是 q 数, 除$\Box F=0$外, 没有更多的限制.

另一方面, 我们能够用规范不变量场强构造"弱"对易关系式:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu}$$

$$[F_{\mu\rho}(x), F_{\nu\sigma}(x')] = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\sigma}\delta_{\rho\nu} + \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\rho}\delta_{\mu\sigma} - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\delta_{\rho\sigma} - \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\delta_{\mu\nu}\right) \cdot iD(x-x'). \qquad [15.19]$$

只当 $\lambda=1,2$ 时, 这些才与

$$[A_\lambda(k), A^*_{\lambda'}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{kk'}$$

等效. 同样, 对真空期待值, 我们有:

$$\langle\{F_{\mu\rho}(x), F_{\nu\sigma}(x')\}\rangle_0 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\sigma}\delta_{\rho\nu} + \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\rho}\delta_{\mu\sigma} - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\delta_{\rho\sigma} - \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\delta_{\mu\nu}\right) \cdot D^{(1)}(x-x'). \qquad [15.20]$$

当 $\lambda=1$ 和 2 时, 这是与

$$N_\lambda = A^*_\lambda A_\lambda, \quad \langle N_\lambda\rangle_0 = 0, \langle A_\lambda A^*_\lambda\rangle_0 = 1$$

等效的. 这里, 我们只用了辅助条件.

我们看到了, "强"对易关系式导致态矢量归一化上的困难, 这些困难是这种理论所固有的, 而与真空的定义无关. 它们不出现在具有"弱"对易关系式的理论中.

b. 戴逊定理[①]

令

① F. J. DYSON, *Phys. Rev.* 77, 420(1950).

$$J \equiv \int d^4x \int d^4x' K_{\mu\nu}(x, x') \Phi_\mu(x) \Phi_\nu(x'), \qquad [15.21]$$

且满足规范不变性要求:

$$\frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial x'^\nu} = 0.$$

定理:

$$\langle J \rangle_0 = \int d^4x \int d^4x' K_{\alpha\alpha}(x, x') \cdot \frac{1}{2}(D^1(x-x') + iD(x-x')).$$

[15.22]

这只能根据"弱"对易关系式导出.

证明:

在动量空间中,仅当满足规范不变性要求:

$$(E)\begin{cases} K_{\mu\nu}k_\nu = 0, \\ k_\mu K_{\mu\nu} = 0 \end{cases}$$

时,定理可等效地表述为:

$$K_{\mu\nu}(k, -k)\langle A_\mu^*(\boldsymbol{k})A_\nu(\boldsymbol{k})\rangle_0 = 0$$

和

$$K_{\mu\nu}(k, -k)\langle A_\mu(\boldsymbol{k})A_\nu^*(\boldsymbol{k})\rangle_0 = K_{\alpha\alpha}(k, -k),$$

令

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + ie_4) = e_+, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - ie_4) = e_-$$

是有用的,这里 e_+和 e_-是实数. 于是

$$(e_+e_+) = (e_-e_-) = 0; \quad (e_+e_-) = 1.$$

这样,e_+和 e_-是非正交的零矢量.

下面 λ 只取 1 和 2,则

$$e_{+\mu} = f(\omega) \cdot k_\mu,$$

$$(e_\lambda e_+) = (e_\lambda e_-) = 0,$$

$$(e_\lambda e_{\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'}.$$

类似地，我们记：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_3 \pm iA_4) = A_{\pm},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_3^* \pm iA_4^*) = A_{\pm}^*.$$

于是，$A_+^* = (A_+)^+$，$A_-^* = (A_-)^+$，的确因为 $A_4^* = -(A_4)^+$. 除了“弱”对易关系式外，“强”对易关系式要求：

$$\begin{cases}[A_+, A_+^*] = [A_-, A_-^*] = 0,\\ [A_+, A_-^*] = [A_-, A_+^*] = 1.\end{cases}$$

辅助条件是：

$$\begin{cases}A_+\Psi = 0,\\ A_+^*\Psi = 0.\end{cases}$$

那么，任一四维矢量可分解如下：

$$F_\mu \sim (F_1, F_2, F_+, F_-),$$

$$F_\mu = \sum_{\lambda=1,2} F_\lambda e_{\lambda\mu} + F_- e_{+\mu} + F_+ e_{-\mu},$$

其中

$$F_\lambda = (Fe_\lambda),$$

$$F_+ = (Fe_+),$$

$$F_- = (Fe_-).$$

如果$(Fk) \equiv F_\nu k_\nu = 0$，这意味着，

$$F_+ = 0. \qquad [15.23]$$

即舍去 e_-的项.

将这种形式应用于我们的问题：

$$K_{\mu\nu} = \sum_{\lambda\lambda'} K_{\lambda\lambda'} e_{\lambda\mu} e_{\lambda'\nu} + K_{\lambda-} e_{\lambda\mu} e_{+\lambda'} + K_{-\lambda'} e_{+\mu} e_{\lambda'\nu} + K_{--} e_{+\mu} e_{+\nu},$$

这里，规范不变性要求(E)已经满足. 于是，

$$\sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu}(k, -k) A_\mu(k) A_\nu^*(k) = \sum_{\lambda\lambda'} K_{\lambda\lambda'} A_\lambda A_{\lambda'}^* + K_{\lambda -} A_\lambda A_+^*$$

$$+ K_{-\lambda} A_+ A_\lambda^* + K_{--} A_+ A_+^*.$$

因为辅助条件 $A_+^*\Psi = A_+\Psi = 0$, 舍去真空期待值中最后三项($[A_+, A_\lambda^*] = 0$), 于是留下:

$$\langle K_{\mu\nu}(k, -k) A_\mu(k) A_\nu^*(k) \rangle_0 = \sum_{\lambda, \lambda' = 1, 2} \langle K_{\lambda\lambda'} A_\lambda A_{\lambda'}^* \rangle_0$$

$$= \sum_{\lambda = 1, 2} K_{\lambda\lambda},$$

$$\langle K_{\mu\nu}(k, -k) A_\mu^*(k) A_\nu(k) \rangle_0 = \sum_{\lambda, \lambda' = 1, 2} \langle K_{\lambda\lambda'} A_\lambda^* A_{\lambda'} \rangle_0 = 0.$$

而且, 因为$K_{33} + K_{44} = K_{+-} + K_{-+}$, 又因根据规范不变性条件($E$), 得 $K_{+-} = K_{-+} = 0$, 所以$\sum_{\lambda=1,2} K_{\lambda\lambda} = \sum_{\alpha=1}^{4} K_{\alpha\alpha}$.

注: 1. 推导不是十分严格的, 因为根据这种规范不变性条件(E) 舍去了的$K_{++}\langle A_- A_-^* \rangle_0$ 项, 实际上是不确定的, 因为由于不能归一化, 而导致$A_-\Psi$和$A_-^*\psi$ 成为无穷大, 而 K_{++} 则因条件(E)而为零, 于是, 这些项实际上形成 $0\times\infty$. 因此, 我们隐含地引入了一个关于如何处理这些项的一个补充规则; 规范不变性条件(E)必须比矢量模方的无穷大"更强".

2. 藏逊定理不是我们的全部需要; 我们会看到, 除此之外, 还需要:

$$J \equiv \int d^4x \int d^4x' K_{\mu\nu}(x, x') \varepsilon(x - x') [\Phi_\mu(x), \Phi_\mu(x')],$$

即使 $K_{\mu\nu}$ 满足规范条件(E), 这量也是不确定的, 因为 $K_{\mu\nu}\varepsilon(t)$不满足(E). 只用"强"对易关系式可以建立一个定理:

$$\langle J \rangle_0 = \int d^4x \int d^4x' K_{\mu\nu}(x, x') \varepsilon(x - x') \cdot iD(x - x') \cdot \delta_{\mu\nu}.$$

因此, 逻辑上是不满足的, 因为一方面, 我们用 "强" 对易关系式, 而另一方面, 又用辅助条件, 它们合起来导致不可归一化状态. 这可利用不定度规而消除.

c. 量子电动力学的古柏塔-勃劳勒处理①

古柏塔和勃劳勒二人都指出，所有这些困难都可用所谓"负几率"形式消除；即使用希耳伯空间中的一不定度规.

通常，希耳伯空间中矢量Ψ的模方由$\sum_n \Psi_n^* \Psi_n$确定，其中Ψ_n^*是Ψ_n的复数共轭. 于是，若哈密顿量是厄密量（$H_{nm}^* = H_{mn}$，或者说，$H^+ = H$，其中$^+$表示厄密共轭），则模方在时间上保持为常数. 期待值为：

$$\langle A \rangle = \frac{\sum_{mn} \Psi_n^* A_{nm} \Psi_m}{\sum_n \Psi_n^* \Psi_n}.$$

现在，在希耳伯空间中，定义一度规算符η将此推广，η虽然是厄密量，但不需要是正定的. 于是，定义如下：

模方：
$$\sum_{nm} \Psi_n^* \eta_{nm} \Psi_m = (\Psi^* \eta \Psi),$$

期待值：
$$\langle A \rangle = \frac{(\Psi^* \eta A \Psi)}{(\Psi^* \eta \Psi)}.$$

因为$\eta^+ = \eta$，模方在时间上保持为常数的条件是：

$$\eta H = H^+ \eta.$$

如果定义算符A^*是A的伴随算符：

$$A^* \equiv \eta^{-1} A^+ \eta,$$

并且定义一自伴算符：

$$A^* = A,$$

则模方守恒的哈密顿量条件是H为自伴算符. 而且，自伴算符有实期待值.

---

① S. GUPTA, *Proc. Phys. Soc.* (*London*)53A, 681(1950); K. BLEULER, *Helv. Phys. Acta* 23, 567(1950).

关于这个理论的评论：

1. 在通常理论中，模方是正的，所以它可乘一正数而等于 +1. 在这个理论中，按这种方式，我们只能得到数 +1，−1 或 0. 零态是奇异的，而且它们不能确定期待值.

2. 因为负几率是没有意义的，所以这个理论是很形式的，因此，我们将很难把这理论应用于物理量. 虽然如此，它用来描述非物理量，例如纵向极化光子会是方便的.

为此，我们处理如下，伴随算符定义为：

$$A_\lambda^* \equiv A_\lambda^+ = A_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, 3),$$

$$-A_4^* \equiv A_4^+ = A_4,$$

其中 $^+$ 表示厄密共轭. 于是

$$\Phi_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \sum_\lambda e_{\mu\lambda}(\boldsymbol{k}) \cdot [A_\lambda(\boldsymbol{k}) \exp[i(kx)]$$

$$+ A_\lambda^+(\boldsymbol{k}) \exp[-i(kx)]].$$

这样，$\Phi_\mu(x)$ 不是厄密量，而是自伴算符. 对易关系式

$$[A_\lambda(\boldsymbol{k}), A_{\lambda'}^+(\boldsymbol{k}')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'}$$

仍然是正确的. 若 $\lambda = 1, 2, 3, 4$，则，

$A_\lambda =$ 湮没算符，

$A_\lambda^+ =$ 产生算符，

$N_\lambda = A_\lambda^+ A_\lambda =$ 数字算符.

下述量[A-5]

$$\sum_{(N_\lambda)} \Psi^*(N_\lambda) \Psi(N_\lambda) (-1)^{N_4}$$

在时间上保持为常数. 于是我们可以要求：

$$\begin{cases} \eta A_\lambda^+ = A_\lambda^+ \eta & (\lambda = 1, 2, 3), \\ \eta A_4^+ = -A_4^+ \eta, \end{cases}$$

由矩阵表示：

$$(N_4|\eta|N_4)(N_4|A_4|N_4-1)=-(N_4|A_4|N_4-1)$$
$$(N_4-1|\eta|N_4-1),$$

可以看出其解为:

$$(N_4|\eta|N_4')=\delta_{N_4N_4'}(-1)^{N_4}.$$

因为

$$(A_3^++iA_4^+)\Psi=0$$

不能得到满足，所以我们必须弱化辅助条件．为此，我们只对正频率要求辅助条件:

$$\left(\frac{\partial\Phi_\mu^-}{\partial x^\mu}\right)^+\Psi=0.$$

这种限制不是危难的．因为期待值

$$\left\langle\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\mu}\right\rangle=0$$

仍然得到满足．读者自己容易确证这点．

和前面讨论的一样，如果我们变换到 $A_\pm$，则应注意，现在

$$A_\pm^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_3^+\mp iA_4^+).$$

于是，当 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'$ 时，

$$[A_+,A_+^+]=[A_-,A_-^+]=1,$$
$$[A_+,A_-^+]=[A_-,A_+^+]=0,$$

这是与前面得到的相反的．于是容易看出，对每一状态，期待值成为:

$$\langle A_-^+A_+\rangle=\langle A_+^+A_-\rangle=\langle A_+A_-^+\rangle=\langle A_-A_+^+\rangle=\langle A_+^+A_+\rangle=0,$$
$$\langle A_+A_+^+\rangle=1,$$

和
$$\langle A_-A_-^+\rangle=1-\langle A_-^+A_-\rangle,$$

这是不确定的，但是有限的．

这样，戴逊定理中存在的问题得到了解决，因为构成 $0\times\infty$ 的项不再出现，又因为对物理量来说，确定的期待值才是基本的．

在下面的讨论中，戴逊P符号(编时或时序乘积)的期待值将是基本的.

定义:

$$P(A(x)B(x'))=\begin{cases}A(x)B(x') & (t>t')\\ B(x')A(x) & (t<t')\end{cases} \qquad [15.24]$$

对更多的因子，有类似的形式. 这可表述为：P乘积描述算符按照时间减少的编排次序.

特别地，对两个因子，

$$P(A(x)B(x'))=\frac{1}{2}\{A(x),B(x')\}$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon(x-x')[A(x),B(x')] \qquad [15.25]$$

例如，在中性标量场理论中，我们有：

$$\langle\{\psi(x),\psi(x')\}\rangle_0=\Delta^1(x-x'),$$

$$[\psi(x),\psi(x')]=i\Delta(x-x').$$

这样，

$$\langle P(\psi(x)\psi(x'))\rangle_0=\frac{1}{2}\Delta^1(x-x')-i\Delta(x-x')$$

$$=\frac{1}{2}\Delta^C(x-x').$$

(注意，在这里出现Δ^C.)

这与电动力学中是类似的. 为了避免涉及非规范不变量，我们只考虑在应用中出现的项：

$$\langle J\rangle_0=\int d^4x\int d^4x' K_{\mu\nu}(x;x')\langle P(\Phi_\mu(x)\Phi_\nu(x'))\rangle_0, \qquad [15.26]$$

因为，

$$\frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial x^\mu}=\frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial x'^\nu}=0.$$

鉴于此，戴逊定理表作：

$$\langle J\rangle_0=\int d^4x\int d^4x' K_{\alpha\alpha}(x,x')\cdot\frac{1}{2}D^{\alpha}(x-x'),\qquad [15.27]$$

对于我们来说，不定度规只是证明这定理的一种方法；进一步讨论时，我们不需要它.

注：1. 显然，只有规范不变量的真空期待值，即型式为，

$$\langle P(F_{\mu\nu}(x)F_{\rho\sigma}(x'))\rangle_0$$

的表达式才是充分定义的.

2. 在这种戴逊 P 乘积中，给了同时性(即对于 $t=$常数的曲面)一个特殊作用.（更一般地说，$t=$常数的平面也可以用类时曲面来代替，这种曲面也许在各处都是实用的，而且在物理学上既不比平面好些，也不比平面坏些. 可参见 § 21）. 同时性的这种特殊作用的根据是正则形式.

§16. 量子电动力学的正则表示

我们由变分原理推导量子电动力学：

$$\delta\int L\,dt=0,$$

其中

$$\left.\begin{aligned}L&=\int\mathscr{L}d^3x,\\ \mathscr{L}&=-\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x^\nu}\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x^\nu}\\ &=\frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t}\right)^2-\sum_k\left(\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial x^k}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}\right)^2-\sum_k\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x^k}\right)^2\right]\right\}\end{aligned}\right\}\qquad [16.1]$$

正则共轭动量是：

$$P(x)=\frac{\delta L}{\delta\dot{Q}}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{Q}},$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{P}(x)&=\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t}\\ P_0(x)&=-\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}\end{aligned}\right\},\qquad [16.2]$$

正则对易关系式是：

$$\left.\begin{aligned} i[P_i(\boldsymbol{x},t),\Phi_k(\boldsymbol{x}',t)]&=\delta_{ik}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\ i[P_0(\boldsymbol{x},t),\Phi_0(\boldsymbol{x}',t)]&=+\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \end{aligned}\right\},$$

其余对易关系式全为零.

这些关系式只对同一时刻是正确的；正则形式，根据其性质而言，只描述在同一时刻发生了什么.

因

$$P_4\equiv\frac{\partial\Phi_4}{\partial t}=-iP_0,\quad \Phi_4=+i\Phi_0,$$

我们有

$$[P_4,\Phi_4]=+[P_0,\Phi_0],$$

由此得，

$$i[P_\mu(\boldsymbol{x},t),\Phi_\nu(\boldsymbol{x}',t)]=i\left[\frac{\partial\Phi_\mu(\boldsymbol{x},t)}{\partial t},\ \Phi_\nu(\boldsymbol{x}',t)\right]$$

$$=\delta_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \qquad [16.3]$$

当然，这些对易关系式包括在前述的更一般的关系式

$$[\Phi_\mu(x),\Phi_\nu(x')]=i\delta_{\mu\nu}D(x-x')$$

之中，通过类似于§14的计算，这是容易核对的. 哈密顿量是：

$$H=\Sigma\dot{Q}\frac{\delta L}{\delta Q}-L\equiv\int\mathscr{H}\mathrm{d}^3x.$$

因此，

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2+\sum_k\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}\right)^2+\sum_k\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x^k}\right)^2\right]\right\}. \qquad [16.4]$$

为了确保期待值满足麦克斯韦方程组，我们仍需一个辅助条件. 这个条件不是由正则公式得出的. 我们假定：

$$\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\mu}\Psi=\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}+\mathrm{div}\boldsymbol{\Phi}\right)\Psi=0. \qquad [16.5]$$

正则方程是:

$$\frac{\partial \Phi_\mu(x)}{\partial t}=i[H,\Phi_\mu(x)]$$

和

$$\frac{\partial^2 \Phi_\mu(x)}{\partial t^2}=i\left[H,\frac{\partial \Phi_\mu(x)}{\partial t}\right],$$

当对 Ψ 应用时,和辅助条件一起,给出麦克斯韦方程组.

辅助条件的相容性:

$$\left[H,\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\mu}\right]\Psi=0 \qquad [16.6]$$

必须成立(必要条件). 因为场强,

$$\boldsymbol{E}\equiv-\nabla\Phi_0-\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t},$$

这意味着 $\mathrm{div}\boldsymbol{E}\cdot\Psi=0$. 下述两条件:

$$\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\mu}\cdot\Psi=0 \text{ 和 } \left[H,\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\mu}\right]\Psi=0,$$

也是充分的,因为,如果它们在某一时刻是满足的话, 那么它们对所有时刻也都满足.

§17. 各种表象

下述内容对普通量子力学是正确的,对量子场论也是正确的.

定义: $\dot{F}$ 是一算符,对于它下式成立:

$$\langle\dot{F}\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle F\rangle. \qquad [17.1]$$

因为物理量是期待值:

$$\langle F\rangle=\sum_{mn}(\Psi_n^*F_{nm}\Psi_m), \qquad [17.2]$$

所以,有多少时间相关性包含在算符中,有多少时间相关性包含在 Ψ 函数中,这只是一个约定. 对于无相互作用的系统, 本质上,只

考虑两种表象.

1. 海森伯表象:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \Psi_H}{\partial t}=0,\\ \dot{F}=\dfrac{\partial F}{\partial t}.\end{cases}$$

2. 薛定谔表象:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \Psi_S}{\partial t}=-iH\Psi_S,\\ \dfrac{\partial F}{\partial t}=0,\end{cases}$$

(在 § 14, § 15 和 § 16 中, 总是提到海森伯表象, 然而, 若各处以 $\dot{F}$ 代替 $\partial F/\partial t$ 的话, 则所有结果在薛定谔表象中也是正确的.)

变换 U 连接这两种表象:

$$\Psi_H=U\Psi_S, \qquad [17.3]$$

$$UU^+=U^+U=1,$$

其中

$$\frac{\partial U}{\partial t}=+iH_SU,$$

且在薛定谔表象中, 有 $H_S=H$. 于是,

$$U=\exp[iH_St], \qquad [17.4]$$

$$\langle F\rangle=(\Psi_H, F_H\Psi_H)=(\Psi_S, F_S\Psi_S).$$

这里, (Ψ_1, Ψ_2) 表示希耳伯空间中的标积, 也有:

$$F_H=UF_SU^{-1} \qquad [17.5]$$

§18. 正电子(自旋为$\frac{1}{2}$的粒子)理论【A-4】

狄拉克方程是:

$$\left(\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}+m\right)\psi=0.$$

令

$$S\equiv\left(\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-m\right)\Delta,\quad 所以\left(\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}+m\right)S=0,$$

$$\bar{S}\equiv\left(\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-m\right)\overline{\Delta},\quad 所以\left(\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}+m\right)\bar{S}=-\delta^{4}(x),$$

$$S^{1}\equiv\left(\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-m\right)\Delta^{1},\quad 所以\left(\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}+m\right)S^{1}=0.$$

于是(参照方程[3.26])

$$\{\psi_{\alpha}(x),\bar{\psi}_{\beta}(x')\}=-iS_{\alpha\beta}(x-x'). \qquad [18.1]$$

特别是,

$$\{\psi_{\alpha}(\boldsymbol{x},t),\bar{\psi}_{\beta}(\boldsymbol{x}',t)\}=-iS_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',0)=+\gamma^{4}_{\alpha\beta}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').$$

而且,因为

$$\bar{\psi}\equiv\psi^{*}\gamma^{4},$$

$$\bar{\psi}\left(\gamma^{\nu}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\nu}}-m\right)=0,$$

我们有

$$\{\psi_{\alpha}(\boldsymbol{x},t),\psi^{*}_{\beta}(\boldsymbol{x}',t)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \qquad [18.2]$$

这和狄拉克方程一起,是与普通的对易关系式[18.1]等效的.

正则形式

这里,动量 π 是勉强的,因为在一给定时间内,不能相互独立地给出 π 和 ψ,的确,$\dot{\psi}$ 是经过狄拉克方程而由 ψ 得出的. 另一方面,ψ 不满足辅助条件;它们可以事先任意规定. 由

$$H=\int\mathscr{H}\mathrm{d}^{3}x,$$

容易满足下列方程:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=i[H,\psi],\quad \frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}=i[H,\psi^{*}].$$

为了确定 $\mathscr{H}$，我们将 γ 矩阵变换到 α 矩阵：

$$\alpha_k = i\gamma^4\gamma^k \qquad (k=1,2,3)$$
$$\beta = \gamma^4.$$

于是狄拉克方程写作：

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{x}} + i\beta m\psi = 0.$$

我们选择 $\mathscr{H}$ 为：

$$\mathscr{H} = -\frac{i}{2}\left\{ \psi^*\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{x}} + i\beta m\psi\right) - \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\alpha} - i\psi^*\beta m\right)\psi \right\},$$

因子的次序正好是正确的．容易证明，这假定满足我们的要求．

注：1．对易关系式[18.2]包含反对易子；但是运动方程式包含对易子．因为 $\mathscr{H}$ 是 ψ 的双线型，这种结果是正确的．

2．形式上，我们可以从拉格朗日函数：

$$\begin{aligned} -\mathscr{L} &= \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^\nu\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\nu}\gamma^\nu\psi\right) + m\bar{\psi}\psi \\ &= -\frac{i}{2}\left\{\psi^*\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{x}} + i\beta m\psi\right)\right. \\ &\qquad \left. -\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \frac{\partial\psi^*}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\alpha} - im\psi^*\beta\right)\psi\right\} \end{aligned}$$

出发，于是由 $\delta\int\mathscr{L}\,d^3x=0$ 得出狄拉克方程．但是，由 $\mathscr{L}=0$（沿一条极值路线）也能得出狄拉克方程，在这里，这似乎是简并性．

第四章　相互作用场：相互作用表象和S矩阵

§19. 电子与电磁场的相互作用

这里，我们必须作下列代换：

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^{\nu}}\to\frac{\partial\psi}{\partial x^{\nu}}-ie\Phi_{\nu}\psi,$$

$$\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x^{\nu}}\to\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x^{\nu}}+ie\Phi_{\nu}\psi^{*}.$$

则场方程式写作：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t}&=i[H+H_{\text{int}},\psi]\\\frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}&=i[H+H_{\text{int}},\psi^{*}]\end{aligned}\right\},\qquad[19.1]$$

其中 H 是先前的 H，并且

$$\left.\begin{aligned}H_{\text{int}}&=\int\mathscr{H}_{\text{int}}\mathrm{d}^{3}x\\\mathscr{H}_{\text{int}}&=-j^{\nu}\Phi_{\nu}=j^{0}\Phi_{0}-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\Phi}\end{aligned}\right\},\qquad[19.2]$$

式中

$$j^{\nu}=ie\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi,$$

$$j^{0}=e\psi^{*}\psi,\quad \boldsymbol{j}=e\psi^{*}\boldsymbol{\alpha}\psi.$$

这样，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\psi}{\partial t}+ie\Phi_{0}\psi+\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{x}}-ie\boldsymbol{\Phi}\psi\right)+i\beta m\psi=0\\&\frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}-ie\Phi_{0}\psi+\left(\frac{\partial\psi^{*}}{\partial\boldsymbol{x}}+ie\boldsymbol{\Phi}\psi^{*}\right)\cdot\boldsymbol{\alpha}-im\psi^{*}\beta=0\end{aligned}\right\}.\qquad[19.3]$$

注：1. 形式上讲，这是根据海森伯表象的．然而，若用 $\dot{\psi}$ 代替 $\partial\psi/\partial t$，则在薛定谔表象中是相同的(见 § 17)．

2. 这里，一个特征是 $\mathscr{H}_{\text{int}}$ 是洛伦兹不变式，并且不包含参与场的导数．

3. 对易关系式：在正则对易关系式中(在相同时间)不发生什么变化，这是正则形式的优点，然而它们不能再推广到不同时间．

4. 如果我们考虑电子与量子化电磁场的相互作用，则必须将哈密顿量写作：

$$H=H_{\text{em}}+H_{\text{Dirac}}+H_{\text{int}},$$

而其它皆保持不变．

§ 20. 自旋为零的带电粒子 ①

我们有

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{L}_m^0&=-\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}-m^2\psi^*\psi\\&=\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi^*}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{x}}-m^2\psi^*\psi\end{aligned}\right\}\qquad[20.1]$$

由

$$\left.\begin{aligned}\pi&\equiv\frac{\delta L}{\delta(\partial\psi/\partial t)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\psi/\partial t)}=\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\\\pi^*&=\frac{\partial\psi}{\partial t}\end{aligned}\right\},\qquad[20.2]$$

得

$$\left.\begin{aligned}i[\pi(\boldsymbol{x},t),\psi(\boldsymbol{x}',t)]&=i\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial t}(\boldsymbol{x},t),\psi(\boldsymbol{x}',t)\right]\\&=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\\i[\pi^*(\boldsymbol{x},t),\ \psi^*(\boldsymbol{x}',\ t)]&=i\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}(\boldsymbol{x},t),\psi^*(\boldsymbol{x}',t)\right]\\&=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\end{aligned}\right\}\qquad[20.3]$$

和

① 参见 § 9 关于使用 Δ 函数的阐述．

$$\mathscr{H}_m^0 = \pi\pi^* + \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} + m^2\psi^*\psi. \qquad [20.4]$$

场方程式变为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} - m^2\right)\psi = 0. \qquad [20.5]$$

与电磁场的相互作用

通常在所有公式中都作下述代换:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} \to \frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} - ie\Phi_\nu\psi,$$

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu} \to \frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu} + ie\Phi_\nu\psi^*.$$

场方程式变为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - ie\Phi_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - ie\Phi_\nu\right)\psi - m^2\psi = 0\\ \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + ie\Phi_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + ie\Phi_\nu\right)\psi^* - m^2\psi^* = 0\end{aligned}\right\}. \qquad [20.6]$$

对应的变分原理是

$$\delta\int \mathscr{L}\mathrm{d}^4x = 0,$$

其中

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^0 + \mathscr{L}^{\mathrm{int}} = -\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu} + ie\Phi_\mu\psi^*\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - ie\Phi_\mu\psi\right) - m^2\psi^*\psi. \qquad [20.7]$$

将空间分量和时间分量分离开,则

$$\mathscr{L} = +\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - ie\Phi_0\psi^*\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + ie\Phi_0\psi\right) - \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x} + ie\boldsymbol{\Phi}\psi^*\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - ie\boldsymbol{\Phi}\psi\right) - m^2\psi^*\psi. \qquad [20.8]$$

在这种情况下,哈密顿形式工作很正常.

由于

$$L=\int\mathscr{L}\mathrm{d}^3x,$$

我们有

$$\pi=\frac{\delta L}{\delta(\partial\psi/\partial t)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\psi/\partial t)}=\frac{\partial\psi^*}{\partial t}-ie\Phi_0\psi^*.$$

即，与无相互作用的情况相比较，这里，π 包含一附加项：

$$\left.\begin{aligned}\pi&=\frac{\partial\psi^*}{\partial t}-ie\Phi_0\psi^*\\ \pi^*&=\frac{\partial\psi}{\partial t}+ie\Phi_0\psi\end{aligned}\right\}. \qquad [20.9]$$

正则对易关系式是：

$$\left.\begin{aligned}i[\pi(x,t),\psi(x',t)]&=i[\pi^*(x,t),\psi^*(x',t)]\\ &=\delta^3(x-x')\\ &\text{其它所有对易关系式}=0\end{aligned}\right\}. \qquad [20.10]$$

注：1. π，而不是 $\partial\psi/\partial t$ 有简单的对易关系式。

2. 相对论不变性是很不明显的。

哈密顿量是

$$\mathscr{H}=\pi\frac{\partial\psi}{\partial t}+\pi^*\frac{\partial\psi^*}{\partial t}-\mathscr{L},$$

它必须用 π 和 ψ 表示，而不能用 $\partial\psi/\partial t$ 和 ψ 表示：

$$\mathscr{H}=\pi\pi^*+m^2\psi^*\psi+ie\Phi_0(\pi^*\psi^*-\pi\psi)+\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x}+ie\Phi\psi^*\right)\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-ie\Phi\psi\right). \qquad [20.11]$$

我们写作：

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_0+\mathscr{H}_{\text{int}}$$

这里 $\mathscr{H}_0$ 是与以前所写下的 $\mathscr{H}_0$ 相同的：

$$\mathscr{H}_0=\pi\pi^*+m^2\psi^*\psi+\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$\mathscr{H}_{\text{int}}=ie\Phi_0(\pi^*\psi^*-\pi\psi)+ie\boldsymbol{\Phi}\cdot\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{x}}-\frac{\partial\psi^*}{\partial\boldsymbol{x}}\psi\right)$$
$$+e^2\boldsymbol{\Phi}^2\psi^*\psi.$$

根据麦克斯韦方程，电流密度是：

$$j^\mu\equiv\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{mat}}}{\partial\Phi_\mu},$$

于是，

$$j^\mu=ie\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}\psi-\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}\right)-2e^2\Phi_\mu\psi^*\psi \qquad [20.12]$$

满足连续性方程：

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu}=0, \qquad [20.13]$$

$$\boldsymbol{j}=ie\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\boldsymbol{x}}\psi-\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{x}}\right)-2e^2\boldsymbol{\Phi}\psi^*\psi.$$

电荷密度是

$$j^0=-ie\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi-\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-2e^2\Phi_0\psi^*\psi$$
$$=+ie(\pi^*\psi^*-\pi\psi).$$

注：1. 首先，对于外电磁场，这是正确的。如果我们加上辐射哈密顿量并保持正则共轭量之间的对易关系式不变，则对于量子化辐射场，它也是正确的。此外，在薛定谔表象和海森伯表象中考虑时，辅助条件不必改变。

2. 关于辅助条件，必须注意：

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\mu}\right)_{x,t},\ \mathscr{H}_{\text{int}}(x',t)\right]=\left[\frac{\partial\Phi_0(x,t)}{\partial t},\ \Phi_0(x',t)\right]j_0(x',t)$$
$$=ij_0(x,t)\delta^3(x-x'). \qquad [20.14]$$

这方程对自旋为$\frac{1}{2}$时也是正确的：

$$\mathscr{H}_{\text{int}}=-j^\nu\Phi_\nu=j^0\Phi_0-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\Phi}.$$

含有 Φ_0的项总是基本的，而且在两种情况下，这一项都是$+j^0\Phi_0$。

§ 21. 相互作用表象

这种表象由朝永振一郎和许温格[①]引入，可以这么说，它介于薛定谔表象和海森伯表象之间.

在 § 17 我们看到了，有多少时间相关归之于态矢量 Ψ，而有多少归之于算符F，这是一个习惯问题，只要期待值$\langle F\rangle=(\Psi^*F\Psi)$有适当的时间相关性：

$$\langle \dot{F}\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle F\rangle.$$

在相互作用表象中，算符的时间相关性和自由场时一样，并且满足自由场方程式. 于是Ψ包含时间相关性，从而使得期待值有正确的时间相关性. 算符的对易关系式也与自由场时一样.

狄拉克，福克和普陀尔斯基[②]早已做过类似的工作，但是他们处理物质和辐射的方法是不同的.

于是，我们要求，相互作用表象中的算符 O_i 为：

$$\frac{\partial O_i}{\partial t}=i[H_0, O_i], \qquad [21.1]$$

此外，我们定义：

$$\dot{O}_i\equiv i[H_0+H_{\text{int}}, O_i] \qquad [21.2]$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle O_i\rangle&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Psi, O_i\Psi_i)\\&=i(\Psi_i, [(H_0+H_{\text{int}})O_i-O_i(H_0+H_{\text{int}})]\Psi_i)\\&=\left(\Psi_i, \frac{\partial O_i}{\partial t}\Psi_i\right)+i(\Psi_i, (H_{\text{int}}O_i-O_iH_{\text{int}})\Psi_i),\end{aligned}$$

---

① S. TOMONAGA, *Progr. Theor. Phys.* **1**, 27, 109(1946); J. SCHWINGER, *Phys. Rev.* **74**, 1439(1948); **75**, 651(1949).

② P. A. M. DIRAC, V. A. FOCK, and B. PODOLSKY, *Phys. Zeitschrift der Sowjetunion* **2**, Heft 6(1936).

这意味着

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = -iH_{\text{int}}\Psi_i. \tag{21.3}$$

相互作用表象中的 Ψ_i，可由薛定谔表象中的 Ψ_S，和海森伯表象中的 Ψ_H，用幺正变换得到：

$$\Psi_i = \exp[iH_0 t]\Psi_S = U\Psi_H,\ UU^+ = U^+U = 1, \tag{21.4}$$

其中

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -iH_{\text{int}}U, \tag{21.5}$$

和

$$O_i = \exp[iH_0 t]O_S\exp[-iH_0 t] = UO_H U^{-1}. \tag{21.6}$$

这种表象选出（如同薛定谔表象所做的那样）一簇 t = 常数的平面. 代替 t = 常数的平面，我们可以考虑更一般的（曲）面 σ，对 σ 的唯一限制是在各处有一类时法线方向. 我们考虑用下列量来代替 $\partial\psi/\partial t$：

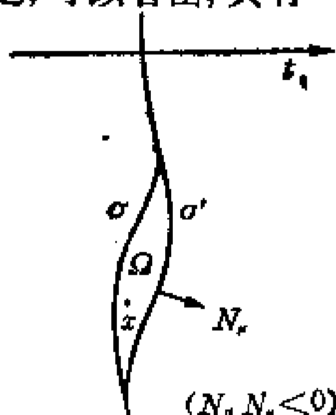
$$\frac{\Psi_i(\sigma') - \Psi_i(\sigma)}{\Omega},$$

式中，Ω 表示 σ 和 σ' 之间包围的有限体积，则令：

$$\frac{\delta\Psi(\sigma)}{\delta\Omega(x)} \equiv \lim_{\Omega\to x}\frac{\Psi_i(\sigma') - \Psi_i(\sigma)}{\Omega}, \tag{21.7}$$

在这里，$\Omega(x)$ 在极限时收缩到 x 点. 于是，可以看出，具有

$$H_{\text{int}} = \int \mathscr{H}_{\text{int}}\mathrm{d}^3x = \int \mathscr{H}_{\text{int}}\mathrm{d}\sigma$$



$(N_x N_x < 0)$

图 21.1

的方程

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = -iH_{\text{int}}\Psi_i$$

推广为

$$\frac{\delta\Psi(\sigma)}{\delta\Omega(x)} = -i\mathscr{H}_{\text{int}}(x)\Psi(\sigma).$$

注：1. 量$\mathscr{H}_{\text{int}}(x)$除依赖于$x$外，还能够（例如，对于自旋为零的情况，见下述）依赖曲面上x点的法线N_μ的方向：$\mathscr{H}_{\text{int}}(x, N_\mu)$.

2. 这些曲面是不合宜的，但在非物理量方面不比$t=$常数的平面更不完善，所谓非物理量是指瞬时量.

于是，对于幺正变换U，它将海森伯表象变换到这种推广的相互作用表象，下式是正确的：

$$\frac{\delta U}{\delta\Omega(x)}=-i\mathscr{H}_{\text{int}}U. \qquad [21.8]$$

当自旋等于$\frac{1}{2}$时，我们有

$$\mathscr{H}_{\text{int}}=-j_\nu\Phi_\nu=-ie\bar{\psi}\gamma^\nu\psi\Phi_\nu. \qquad [21.9]$$

当自旋为零时，情况不那么平常（见上面注1）：

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{H}_0=\pi\pi^*+\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+m^2\psi^*\psi\\
&\mathscr{H}_{\text{int}}=ie\Phi_0(\pi^*\psi^*-\pi\psi)+ie\boldsymbol{\Phi}\cdot\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)\\
&\qquad\qquad+e^2\boldsymbol{\Phi}^2\psi^*\psi
\end{aligned}\right\}. \qquad [21.10]$$

在海森伯表象中，这是正确的. 当然，在相互作用表象中，得到相同的结果；每一个算符只是取其相互作用表象，然而，在这里，自由场方程式和对易关系式适用. 这样，

$$(\pi)_i=\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)_i, \qquad (\neq\dot{\psi}^*{}_1),$$

$$(\pi^*)_i=\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_i.$$

于是，在相互作用表象中，对$t=$常数的平面，得，

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{H}_{\text{int}}&=ie\Phi_\nu\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}\psi\right)+e^2\sum_1^3\Phi_k^2\psi^*\psi\\
&=ie\Phi_\nu\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\psi\right)+e^2\Phi_\nu\Phi_\nu\psi^*\psi+e^2\Phi_0^2\psi^*\psi
\end{aligned}\right\}.$$

[21.11]

利用法向矢量 N_ν:

$N_\nu N_\nu = -1$

对 t = 常数的平面: $N_\nu = (0, 0, 0, i)$, 将上式推广到曲面 σ:

$$\mathscr{H}_{\text{int}} = ie\Phi_\nu\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}\psi\right) + e^2\Phi_\nu\Phi_\nu\psi^*\psi$$
$$+ e^2(\Phi_\nu N_\nu)^2\psi^*\psi. \qquad [21.12]$$

因此, 这里 $\mathscr{H}_{\text{int}}$ 不是不变量.

电动力学的辅助条件

对海森伯表象, 我们有方程[15.9]:

$$\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\mu} \cdot \Psi = 0$$

当然, 在相互作用表象中, 在相同时间, 这还是正确的:

$$\left(\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\mu}\right)_t \cdot \Psi(t) = 0, \qquad [21.13]$$

如果选择两个不同时间, 则得到我们所希望的一附加项.

若 $\Box\, u = 0$, 则

$$u(x, t) = \int_{t''=t'} d^3x'' \left[u(x'')\frac{\partial D(x-x'')}{\partial t''} - \frac{\partial u(x'')}{\partial t''}D(x-x'')\right]$$

是在 $t = t'$ 时, 具有下述边界值:

$$u(x, t') \text{ 和} \left(\frac{\partial u(x, t'')}{\partial t''}\right)_{t''=t'} \qquad [21.14]$$

的解. 这由下列性质可立即得出:

$$D(x, 0) = 0 \text{ 和 } \frac{\partial D}{\partial t}(x, 0) = -\delta^3(x).$$

于是,

$$\left(\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\mu}\right) = \int_{t'=t_0} d^3x' \left[\frac{\partial D(x-x')}{\partial t'}\frac{\partial\Phi_\mu(x')}{\partial x'^\mu}\right.$$
$$\left. - D(x-x')\frac{\partial^2\Phi_\mu(x')}{\partial x'^\mu \partial t'}\right],$$

因为，在相互作用表象中，$\partial\Phi_\mu/\partial x^\mu$ 满足自由场方程式，则因上式第一项为零，所以

$$\left(\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\mu}\right)_t\cdot\Psi(t_0)=-\int_{t'=t_0}\mathrm{d}^3x'D(x-x')\frac{\partial^2\Phi_\mu}{\partial x'^\mu\partial t'}\Psi(t_0)$$

因此，

$$\left(\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\mu}\right)_t\cdot\Psi(t_0)=-\left(\int_{t'}\mathrm{d}^3x'D(x-x')\frac{\partial^2\Phi_\mu(x')}{\partial x'^\mu\partial t'}\Psi(t')\right)_{t'=t_0}.$$

依据部分积分法，及大家熟知的关于同时的辅助条件，只 $\partial\Psi/\partial t'$ 有贡献，以及

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-iH_{\text{int}}\Psi,$$

得：

$$\left(\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\mu}\right)_t\cdot\Psi(t_0)=\left(\int_{t'}\mathrm{d}^3x'D(x-x')\frac{\partial\Phi_\mu(x')}{\partial x'^\mu}\cdot[-iH_{\text{int}}(t')\Psi(t')]\right)_{t'=t_0}.$$

再利用关于同时的辅助条件，上式可写作：

$$\left(\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\mu}\right)_t\cdot\Psi(t_0)=-i\left(\int_{t'}\mathrm{d}^3x'D(x-x')\cdot\left[\frac{\partial\Phi_\mu(x')}{\partial x'^\mu},H_{\text{int}}(t')\right]\Psi(t')\right)_{t'=t_0},$$

$$\left(\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\mu}\right)_t\cdot\Psi(t_0)=-i\int_{t'=t_0}\mathrm{d}^3x'D(x-x')\cdot\left[\frac{\partial\Phi_\mu(x')}{\partial x'^\mu},H_{\text{int}}(t')\right]\Psi(t_0).\qquad[21.15]$$

因为，我们已经说过，当自旋为$\frac{1}{2}$和 0 时，

$$\left[\frac{\partial\Phi_\mu(x')}{\partial x'^\mu},\mathscr{H}_{\text{int}}(x'')\right]_{t'=t''}=ij^0(x',t)\delta^3(x'-x'').\qquad[21.16]$$

于是，

$$\left[\frac{\partial\Phi_\mu(x')}{\partial x'^\mu},H_{\text{int}}(t')\right]=ij^0(x',t'),$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\mu}\right)_t \cdot \Psi(t_0) = \int_{t'=t_0} \mathrm{d}^3x' D(x-x') j^0(x', t_0)\Psi(t_0),$$

或

$$\left\{\frac{\partial \Phi_\mu(x)}{\partial x^\mu} - \int_{t'=t_0} D(x-x') j^0(x', t_0)\mathrm{d}^3x'\right\}\Psi(t_0) = 0. \tag{21.17}$$

对于曲面，$j^0 = -j^\alpha N_\alpha$，所以有

$$\left\{\frac{\partial \Phi_\mu(x)}{\partial x^\mu} + \int_\sigma (j^\alpha N_\alpha) D(x-x')\mathrm{d}^3x'\right\}\Psi(\sigma) = 0. \tag{21.18}$$

注：这对自旋为 0 是正确的，对自旋为$\frac{1}{2}$也是正确的。

§ 22. 戴逊积分法[①]

我们考虑方程[21.5]：

$$i\frac{\partial U}{\partial t} = H_{\mathrm{int}} U$$

的积分，算符U将海森伯表象转换到相互作用表象。这里，在相互作用表象中，U 也将 $\Psi(t_0)$转换到 $\Psi(t)$：

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = -iH_{\mathrm{int}}\Psi_i,$$

$$\Psi_i(t) = U(t_0, t)\Psi_i(t_0). \tag{22.1}$$

其中，

$$\frac{\partial U(t_0, t)}{\partial t} = -iH_{\mathrm{int}}(t)U(t_0, t).$$

戴逊公式：若P表示时序乘积，则当 $t \geqslant t_0$ 时，有，

$$U(t_0, t) = P\left(\exp\left[-i\int_{t_0}^t H_{\mathrm{int}}(t')\mathrm{d}t'\right]\right). \tag{22.2}$$

注：1. 指数是符号，它表示一个级数：

---

① F. J. DYSON, *Phys. Rev.* 75, 486, 1736(1949).

$$U(t_0,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\cdots\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_n P(H_{\mathrm{int}}(t_1)\cdots H_{\mathrm{int}}(t_n)).$$

[22.3]

2. 如前所述，P 由[15.24]式定义：

$$P(A(t_1)B(t_2))=\begin{cases}A(t_1)B(t_2) & (t_1>t_2),\\ B(t_2)A(t_1) & (t_1<t_2).\end{cases}$$

当 $t_1=t_2$ 时，P 是不确定的.

3. 证明：这几乎是显然的，$U(t_0,\ t)$满足微分方程式 [21.5]，因为 $H_{\mathrm{int}}(t_j)$含有最大时间，因此总位于左边.

4. 相反，

$$U^{-1}(t_0,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(+i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\cdots\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_n P_-(H_{\mathrm{int}}(t_1)\cdots H_{\mathrm{int}}(t_n)).$$

其中 P_-表示反时序(最大时间在右边).

5. 在这里，主要假设是：

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{t}^{t+\tau}\mathrm{d}t_1\int_{t}^{t+\tau}\mathrm{d}t_2 P(H_{\mathrm{int}}(t_1)H_{\mathrm{int}}(t_2))=0,$$

对于奇点 $P(H\cdot H)$，这不是明显的(见下述自旋为零的情况).

a. 与海森伯 S 矩阵的联系 ①

我们定义

$$S\cong U(-\infty,\ +\infty). \qquad [22.4]$$

这算符只在能量壳层上——即只对总能量相同的态才不为零.

为了使这种联系形式上精确起见，我们写：

$$U(t_0,\ t)=1+\int_{t_0}^{t}W(t')\mathrm{d}t'=1+V(t_0,\ t), \qquad [22.5]$$

式中

$$W(t')=-iH_{\mathrm{int}}(t')+\cdots,$$

我们专门在狄拉克意义下的表象中进行讨论：状态由对易子的一完全集的本征值 $q_0, q_1, q_2, \cdots$表征. 此外，在这里，q 必须是

① W. HEISENBERG, Z. *Physik* **120**, 513, 673(1943).

无相互作用系统的积分；即，

$$[q,H_0]=0.$$

于是

$$(q_1|W(t)|q_0)=\frac{1}{2\pi}(q_1|R|q_0)\exp[+i(\omega_1-\omega_0)t]. \qquad [22.6]$$

注：这在一定条件下才是正确的．为了使初态可以选择 H_0 的本征态，相互作用必须绝热地接通（例如，我们用 $\exp[-\varepsilon|t|]H_{\text{int}}$ 代替 H_{int}，其中 ε 很小）．否则，我们也能选择一组合适的 H_0 的本征态，它们对应于限制在“长度”为 $2T$ 时间中的一个波列，作为初态．于是，当 $|t|>T$ 时，相互作用可以忽略．这波包不对应于 H_0 的锐值，而且 $(q_1|W(t)|q_0)$ 不再是严格单色的．于是，我们必须考虑用 $V(-t_1,+t_1)$ 代替 $V(-\infty,t)$，其中 $t_1>T$，所以在时间 $-t_1$ 和 $+t_1$ 系统无相互作用．然后，我们可令 $t_1\to\infty$，再令 $T\to\infty$．在这种形式中进行计算时，这两种极限过程是相反的：我们擅自先令 $T\to\infty$，然后再取 $t\to\infty$．由此发生似非而是的议论：

$$|(q_1|V(-\infty,t)|q_0)|^2$$

是与 t 无关的．然而，按照上述原则所作的严格计算指出，由此所得的计算结果不变．

于是，

$$(q_1|V(-\infty,t)|q_0)=(q_1|R|q_0)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t}\exp[-i(\omega_0-\omega_1)t']dt',$$

或

$$(q_1|V(-\infty,t)|q_0)=(q_1|R|q_0)\exp[-i(\omega_0-\omega_1)t]\delta_-(\omega_0-\omega_1). \qquad [22.7]$$

注：在这里

$$\delta_\pm(\omega)=\frac{1}{2}\left[\delta(\omega)\pm\frac{1}{i\pi\omega}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\exp[\mp i\omega t]dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0\exp[\pm i\omega t]dt.$$

于是，当 $t\to\infty$ 时得，

$$(q_1|V(-\infty,+\infty)|q_0)=(q_1|R|q_0)\delta(\omega_0-\omega_1). \qquad [22.8]$$

这是根据下述引理:

$$\lim_{t\to+\infty}\int f(\omega)\exp[-i\omega t]\delta_+(\omega)\mathrm{d}\omega=0, \qquad [22.9]$$

其中 $f(\omega)$ 是任意的，但是规则的. 则因 $\delta_-(\omega)=\delta(\omega)-\delta_+(\omega)$，立即得出，当 $t\to\infty$ 时，在 $V(-\infty,t)$ 中，可作 $\delta_-(\omega)\to\delta(\omega)$ 和 $\exp[i\omega t]\to1$ 的代换.

该引理证明如下:

$$J=\int f(\omega)\delta_+(\omega)\exp[-i\omega t]\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(\omega)}{\omega}\exp[-i\omega t]\mathrm{d}\omega ,$$

式中积分路线 C_+ 示于图 22.1. 将 C_+ 变形为 C'_+，得,

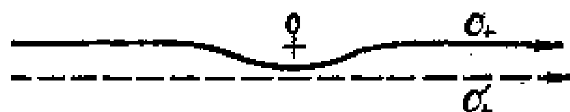


图 22.1

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-i\varepsilon)\exp[-ixt-\varepsilon t]\frac{\mathrm{d}x}{x-i\varepsilon}\to0,\ t\to\infty.$$

b. 跃迁几率

最重要的是，用 S 矩阵计算截面. 为此，我们考虑跃迁几率:

$$\left|\left(q_1\left|V\left(-\frac{T}{2},\ +\frac{T}{2}\right)\right|q_0\right)\right|^2=|(q_1|R|q_0)|^2$$

$$\cdot\frac{1}{4\pi^2}\left|\int_{-T/2}^{+T/2}\exp[-i\omega t]\mathrm{d}t\right|^2$$

$$=|(q_1|R|q_0)|^2\cdot\frac{1}{4\pi^2}\left|\frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega/2)}\right|^2.$$

对于大 $T(T\gg1/\omega)$,

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin^2((\omega/2)T)}{(\omega/2)^2T}\to\delta(\omega)$$

显然是正确的;归一化检验是:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2((\omega/2)T)}{(\omega/2)^2T}\mathrm{d}\omega=1.$$

于是,对于大 T,

$$\left|\left(q_1\left|V\left(-\frac{T}{2},+\frac{T}{2}\right)\right|q_0\right)\right|^2\simeq\frac{1}{2\pi}|(q_1|R|q_0)|^2\cdot\delta(\omega)\cdot T.$$

则单位时间内的跃迁几率为:

$$W=\frac{1}{2\pi}|(q_1|R|q_0)|^2\cdot\delta(\omega). \qquad [22.10]$$

后面我们将用这结果.

关于 S 矩阵的评注:

最初,海森伯希望在不用哈密顿形式的理论中,同样能够简单地表述 S 矩阵. 但是,现在人们通常认为只包含 S 矩阵的理论希望太小. 在这种情况中,不再出现时间,这无疑是走得太远了.

c. 戴逊公式的附注:

方程[22.3]

$$U(t_0,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\cdots\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_nP(H_{\mathrm{int}}(t_1)\cdots H_{\mathrm{int}}(t_n)),$$

可写作:

$$U(t_0,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}^4x_1\cdots\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}^4x_nP(\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(x_1)\cdots\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(x_n)). \qquad [22.11]$$

这里,对于自旋为$\frac{1}{2}$,式中$\mathscr{H}_{\mathrm{int}}$是不变量,因被积函数是洛伦兹不变量,所以洛伦兹不变性变得明显了.(然而,积分体积不是洛伦兹不变量,但这是一种固有特性,只当$U(-\infty,+\infty)\equiv S$时,整个表式变成不变式.)

用曲面σ,我们可以写作:

$$U(\sigma_0,\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\mathrm{d}^4x_1\cdots\int_{\sigma_0}^{\sigma}\mathrm{d}^4x_n P(\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(x_1)\cdots\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(x_n)),$$

[22.12]

其中

$$\frac{\delta U(\sigma_0,\sigma)}{\delta\Omega(x)}=-i\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(x)U(\sigma_0,\sigma) \qquad [22.13]$$

§ 23. 自旋为零时的 P^* 乘积

1. 当自旋为零时，出现已经经常提到的复杂性，即$\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(x)$不是不变量，且与面法线有关. 我们有:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{int}}=-\mathscr{L}_{\mathrm{int}}+e^2(\Phi_\alpha N_\alpha)^2\psi^*\psi. \qquad [23.1]$$

式中 $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}$ 是相互作用的拉格朗日密度:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{int}}=-ie\Phi_\mu\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}\psi\right)-e^2\Phi_\alpha\Phi_\alpha\psi^*\psi, \qquad [23.2]$$

而 N_μ 是σ 上 x 点的法线.

2. 当时间相同时，P 符号是不确定的. 只要

$$[\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x},t),\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{x}',t)]=0,$$

当时间相同时，P 符号不产生任何影响. 然而，当自旋为零时，

$$[\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(x),\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(x')]=e^2\Phi_\mu(x)\Phi_\nu(x')\Big\{\psi^*(x)\psi(x')\Big[\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu},\frac{\partial\psi'^*}{\partial x'^\nu}\Big]+\psi(x)\psi^*(x')\Big[\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu},\frac{\partial\psi'}{\partial x'^\nu}\Big]\Big\}$$

$$+\begin{pmatrix}\text{在 } t=t' \text{ 时有较弱奇异性的项,}\\ \text{这些项不作贡献.}\end{pmatrix},$$

$$[\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(x),\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(x')]$$
$$=ie^2\Phi_\mu(x)\Phi_\nu(x')\Big\{\psi^*(x)\psi(x')\frac{\partial^2\Delta(x-x')}{\partial x^\mu\partial x'^\nu}+\psi(x)\psi^*(x')\frac{\partial^2\Delta(x-x')}{\partial x^\mu\partial x'^\nu}\Big\}+\cdots, \qquad [23.3]$$

$$\left(\text{或} = 2ie^2\Phi_\mu(x)\Phi_\nu(x')\psi^*(x)\psi(x')\frac{\partial^2\Delta(x-x')}{\partial x^\mu\partial x'^\nu}+\cdots\right).$$

西岛①指出，若引入一个稍微修正的P乘积形式，怎么能够消除这两个困难．两个因子的戴逊乘积是(方程[15.25])：

$$P(A(t)B(t')) = \frac{1}{2}\{A(t),\ B(t')\}$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon(t-t')[A(t), B(t')],$$

当 $t=t'$ 时，这是不确定的．按下列方式，我们定义一个修正的乘积 P^*：若$[A, B]$包含一项具有下列型式

$$K_{\mu\nu}\partial^2\Delta(x-x')/\partial x^\mu\partial x'^\nu$$

的"临界"项．即当

$$[A, B]=[A, B]_{reg}+K_{\mu\nu}\frac{\partial^2\Delta(x-x')}{\partial x^\mu\partial x'^\nu}, \qquad [23.4]$$

则总会有，

$$P^*(A(x)B(x'))$$

$$=\frac{1}{2}\{A(x),\ B(x')\}+\frac{1}{2}\varepsilon(x-x')[A(x), B(x')]_{reg}$$

$$-K_{\mu\nu}\frac{\partial^2\overline{\Delta}(x-x')}{\partial x^\mu\partial x'^\nu}. \qquad [23.5]$$

这就是说，右边的 ε 总可以经过微分获得．

注：这只是对 $t=t'$ 的修正；的确是只对 $x=x'$ 的．

引理：

$$L\equiv\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\mathrm{d}t'\int_t^{t+\tau}\mathrm{d}t''\int\mathrm{d}^3x''\frac{\partial^2\overline{\Delta}(x'-x'')}{\partial x'^\mu\partial x''^\nu}=\delta_{\mu4}\delta_{\nu4},$$

[23.6]

因为

① K. NISHIJIMA, *Prog. Theoret. Phys*. **5**, 405(1950).

$$L=-\delta_{\mu4}\delta_{\nu4}\lim_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\mathrm{d}t'\int_t^{t+\tau}\mathrm{d}t''\int\mathrm{d}^3x''(\Box'-m^2)\overline{\Delta}(x'-x'')$$

$$=+\delta_{\mu4}\delta_{\nu4}\lim_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\mathrm{d}t'\int_t^{t+\tau}\mathrm{d}t''\int\mathrm{d}^3x''\delta^4(x'-x'')$$

$$=+\delta_{\mu4}\delta_{\nu4}.$$

于是得到,例如:

$$\lim_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}\int\mathrm{d}^3x'\int\mathrm{d}^3x''\int_t^{t+\tau}\mathrm{d}t'\int_t^{t+\tau}\mathrm{d}t''K_{\mu\nu}(x',x'')\frac{\partial^2\overline{\Delta}(x'-x'')}{\partial x'^{\mu}\partial x''^{\nu}}$$

$$=\int\mathrm{d}^3x'K_{44}(x',t;x',t).\qquad[23.7]$$

现在,必须指出,我们得到方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-i\int\mathrm{d}^3x\mathscr{H}_{\text{int}}\cdot U$$

的一个正确解:

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}^4x_1\cdots\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}^4x_nP^*(-\mathscr{L}_{\text{int}}(x_1)\cdots,$$

$$-\mathscr{L}_{\text{int}}(x_n)),\qquad[23.8]$$

其中 $\mathscr{L}_{\text{int}}(x)$ 表示不变的相互作用拉格朗日密度.

注: 1. 我们有

$$\mathscr{H}_{\text{int}}(x)=-\mathscr{L}_{\text{int}}(x)+e^2\Phi_0^2(x)\psi^*(x)\psi(x).$$

而且,

$$[\mathscr{H}_{\text{int}}(x),\mathscr{H}_{\text{int}}(x')]=2ie^2\Phi_\mu(x)\Phi_\nu(x)\psi^*(x)\psi(x)\frac{\partial^2\Delta(x-x')}{\partial x^\mu\partial x'^\nu}+\cdots$$

$$=K_{\mu\nu}(x)\ \frac{\partial^2\Delta(x-x')}{\partial x^\mu\partial x'^\nu},$$

由此,

$$\mathscr{H}_{\text{int}}(x)=-\mathscr{L}_{\text{int}}(x)+\frac{i}{2}K_{44}(x).\qquad[23.9]$$

2. 对易关系式中的临界项来自对易子

$$\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu},\ \frac{\partial\psi'}{\partial x'^\nu}\right],$$

因而来自$[\mathscr{H}_{\text{int}},\ \mathscr{H}_{\text{int}}]$中的$[\mathscr{L}_{\text{int}},\ \mathscr{L}_{\text{int}}]$项，而不来自其它项．这就是说，

$$[-\mathscr{L}_{\text{int}}(x),\ -\mathscr{L}_{\text{int}}(x')]=K_{\mu\nu}(x)\frac{\partial^2\Delta(x-x')}{\partial x^\mu\partial x'^\nu}+\cdots. \qquad [23.10]$$

现在计算 $\partial U/\partial t$:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}(U(t+\tau)-U(t)).$$

除了无关紧要的项$-\int d^3x\mathscr{L}_{\text{int}}\cdot U$以外，还有一附加项来自二重积分(见引理)．只要最多出现$\overline{\Delta}$的二次导数，则更高次(三重或更高重)积分无贡献．

因为有$\binom{n}{2}$对积分，恰好得到正确的组合因子．于是，

$$\frac{\partial U}{\partial t}=(-i)\left(-\int d^3x\mathscr{L}_{\text{int}}\right)\cdot U$$

$$+\frac{(-i)^2}{2!}\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int d^3x'\int_t^{t+\tau}dt'\int d^3x''\int_t^{t+\tau}dt''\cdot$$

$$\cdot P^*(\mathscr{L}_{\text{int}}(x')\mathscr{L}_{\text{int}}(x''))\cdot U,$$

这里 $P^*(\mathscr{L}_{\text{int}}(x')\mathscr{L}_{\text{int}}(x''))\to -K_{\mu\nu}(x')\dfrac{\partial^2\overline{\Delta}(x'-x'')}{\partial x'^\mu\partial x''^\nu}$.

于是，根据引理[23.7]式，

$$\frac{\partial U}{\partial t}=(-i)\left(-\int d^3x\mathscr{L}_{\text{int}}\right)\cdot U+\frac{1}{2}\int d^3x'K_{44}(x')\cdot U,$$

$$i\frac{\partial U}{\partial t}=-\int d^3x\left(\mathscr{L}_{\text{int}}(x)-\frac{i}{2}K_{44}(x)\right)\cdot U,$$

故最后得:

$$i\frac{\partial U}{\partial t}=H_{\text{int}}U.$$

证毕．

注意：上述一切的根据是：对易子中的临界项和哈密顿量中的非不变项是相同的．这不是偶然的，这是很普遍正确的．

作为$K_{\mu\nu}(x)$的定义，令

$$[\mathscr{H}_{\text{int}}(x),\mathscr{H}_{\text{int}}(x')]=K_{\mu\nu}(x)\frac{\partial^2\Delta(x-x')}{\partial x^\mu\partial x'^\nu}+\text{非临界项}$$

[23.11]

于是，

$$\mathscr{H}_{\text{int}}(x)=-\mathscr{L}_{\text{int}}(x)-\frac{i}{2}K_{\mu\nu}N_\mu N_\nu,\quad N_\mu N_\mu=-1.$$

[23.12]

令N在第 4 方向，则 $N_4=i$，且

$$\mathscr{H}_{\text{int}}(x)=-\mathscr{L}_{\text{int}}(x)+\frac{i}{2}K_{44}(x).\qquad [23.13]$$

现在我们要普遍地证明这关系，就是说，我们要证明这关系总是正确的，只要相互作用拉格朗日密度至多是关于场导数的线性函数.

状态 $\Psi(\sigma)$的运动方程是：

$$\left(\mathscr{H}_{\text{int}}(x,N)-i\frac{\delta}{\delta\Omega(x)}\right)\Psi(\sigma)=0.\qquad [23.14]$$

为了使这方程得到满足，下列可积性条件必须是正确的：

$$\left[\mathscr{H}_{\text{int}}(x,N)-i\frac{\delta}{\delta\Omega(x)},\mathscr{H}_{\text{int}}(x',N')-i\frac{\delta}{\delta\Omega(x')}\right]=0.$$

[23.15]

确实，因为所有这样的理论都是由海森伯表象中一个自洽表述得出的，所以这个要求总是满足的.

于是，我们得到，

$$[\mathscr{H}_{\text{int}}(x,N),\mathscr{H}_{\text{int}}(x',N')]$$
$$=i\frac{\delta}{\delta\Omega(x)}\mathscr{H}_{\text{int}}(x',N')-i\frac{\delta}{\delta\Omega(x')}\mathscr{H}_{\text{int}}(x,N).$$

[23.16]

现在，如果我们考虑临界项，可使之关于 x 和 x' 反对称化，并且得到方程左边为：

$$\frac{1}{2}\left(K_{\mu\nu}(x)\frac{\partial^2\Delta(x-x')}{\partial x^\mu\partial x'^\nu}-K_{\mu\nu}(x')\frac{\partial^2\Delta(x'-x)}{\partial x'^\mu\partial x^\nu}\right).$$

如果令

$$i\frac{\delta}{\delta\Omega(x)}\mathscr{H}_{\text{int}}(x',\ N')=\frac{1}{2}K_{\mu\nu}\frac{\partial^2\Delta(x-x')}{\partial x^\mu\partial x'^\nu},\qquad[23.17]$$

则方程[23.16]得到满足.

我们需要利用高斯定理:

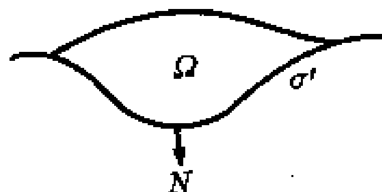


图 23.1

$$-\oint_{\sigma'}F_\mu N_\mu \mathrm{d}^3\sigma=\int_\Omega\frac{\partial F_\mu}{\partial x^\mu}\mathrm{d}^4x,\qquad[23.18]$$

这就是说,

$$-\frac{\delta}{\delta\Omega(x)}\int_\sigma F_\mu N_\mu \mathrm{d}^3\sigma=\frac{\partial F_\mu}{\partial x^\mu}.\qquad[23.19]$$

于是,可将方程[23.17]积分,得,

$$\mathscr{H}_{\text{int}}(x',N')=\frac{i}{2}\int_\sigma K_{\mu\nu}(x)\frac{\partial\Delta(x-x')}{\partial x'^\nu}N_\mu \mathrm{d}^3\sigma\qquad[23.20]$$

注: 严格地说,为了使变换可能进行,我们应当设法将奇异量Δ规则化.

如果我们专门讨论 $N_4=i$ 的坐标系,则

$$N_4=i,\ \mu=4,\ \frac{\partial\Delta(x-x')}{\partial x'^4}=-i\frac{\partial\Delta}{\partial x'^0}=-i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').$$

这样,

$$\mathscr{H}_{\text{int}}(x',N')=+\frac{i}{2}K_{44}(x')=-\frac{i}{2}K_{\mu\nu}(x')N'_\mu N'_\nu,\qquad[23.21]$$

于是找到了我们所要找的关系. 于是,我们也证明了,不仅对标量理论,而且对所有其他理论(例如矢量理论), 其中 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 至多包含场量微分的线性项,P^*符号可以消除与法线有关的项.

第五章　海森伯表象：S 矩阵和电荷重正化

§24. S 矩阵和海森伯表象[①]

S 矩阵可以不涉及表面而确定，虽然戴逊公式在实际计算中仍然是较简单的.

在海森伯表象中，我们有

$$\begin{cases}\left(\gamma^\nu\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}+m\right)\psi=+ie\gamma^\nu\Phi_\nu\psi,\\ \dfrac{\partial\bar\psi}{\partial x^\nu}\gamma^\nu-m\bar\psi=-ie\bar\psi\gamma^\nu\Phi_\nu,\\ \Box\Phi_\nu=-j^\nu,\ j^\nu=\dfrac{ie}{2}[\bar\psi,\gamma^\nu\psi]=ie\bar\psi\gamma^\nu\psi,\\ \dfrac{\partial\Phi_\nu}{\partial x^\nu}\cdot\Psi=0\end{cases}$$

（对照§15和§19）．用下列方程定义入射场和出射场：

$$\left.\begin{aligned}\Phi_\nu(x)&=\Phi_\nu^{\text{in}}(x)+\int D^{\text{ret}}(x-x')j^\nu(x')\mathrm{d}^4x'\\ \psi(x)&=\psi^{\text{in}}(x)-ie\int S^{\text{ret}}(x-x')\gamma^\nu\Phi_\nu(x')\psi(x')\mathrm{d}^4x'\\ \bar\psi(x)&=\bar\psi^{\text{in}}(x)-ie\int\bar\psi(x')\gamma^\nu\Phi_\nu(x')S^{\text{adv}}(x'-x)\mathrm{d}^4x'\end{aligned}\right\}. \tag{24.1}$$

当 $t\to-\infty$ 时，根据推迟函数的定义，积分为零，所以入射场等于

① C. N. YANG(杨振宁)and D. FELDMAN, *Phys. Rev.* **79**, 972(1950).

全部场．当 $t\to-\infty$时，对于海森伯场，自由对易关系式成为渐近正确的．此外，入射场满足自由场方程式：

$$\left.\begin{aligned}\left(\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\pm m\right)\psi^{\text{in}}=0\\ \bar{\psi}^{\text{in}}\left(\gamma^{\nu}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\nu}}-m\right)=0\\ \Box\Phi_{\nu}^{\text{in}}=0\end{aligned}\right\}. \qquad [24.2]$$

于是，对于入射场，自由对易关系式是正确的：

$$\left.\begin{aligned}\{\psi_{\alpha}^{\text{in}}(x),\bar{\psi}_{\beta}^{\text{in}}(x')\}=-iS_{\alpha\beta}(x-x')\\ [\Phi_{\mu}^{\text{in}}(x),\Phi_{\nu}^{\text{in}}(x')]=i\delta_{\mu\nu}D(x-x')\end{aligned}\right\}. \qquad [24.3]$$

类似地，我们定义出射场：

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{\nu}(x)&=\Phi_{\nu}^{\text{out}}(x)+\int D^{\text{adv}}(x-x')j^{\nu}(x')\mathrm{d}^4x'\\ \psi(x)&=\psi^{\text{out}}(x)-ie\int S^{\text{adv}}(x-x')\gamma^{\nu}\Phi_{\nu}(x')\psi(x')\mathrm{d}^4x'\\ \bar{\psi}(x)&=\bar{\psi}^{\text{out}}(x)-ie\int\bar{\psi}(x')\gamma^{\nu}\Phi_{\nu}(x')S^{\text{ret}}(x'-x)\mathrm{d}^4x'\end{aligned}\right\}. \qquad [24.4]$$

完全同样地得到这些场也满足自由场方程式和自由对易关系式．

因为两组场满足同样的关系式，它们之间必存在一正则变换．令 $F=\psi,\bar{\psi}$ 或 Φ_{ν}，则

$$F^{\text{out}}(x)=S^{-1}F^{\text{in}}(x)S. \qquad [24.5]$$

这里S是S矩阵，同样它必须定义在海森伯表象中．

根据这个定义，原则上，我们能够循环地计算S矩阵(按照e的幂)．但是，这比戴逊形式复杂得多．我们将不再进一步讨论它．然而，根据 R．格劳伯[A-6]，我们将给出与相互作用表象的联系．为此，我们定义与曲面σ有关的新Δ函数：

$$\Delta^{\sigma}(x;x')=\begin{cases}\Delta^{\text{ret}}(x-x') & x'\text{ 比 }\sigma\text{ 迟}\\ \Delta^{\text{adv}}(x-x') & x'\text{ 比 }\sigma\text{ 早}\end{cases}. \qquad [24.6]$$

用

$$\varepsilon(x-x')\equiv\begin{cases}+1 & (t>t')\\ -1 & (t<t')\end{cases},$$

且相应地

$$\varepsilon(\sigma,x')\equiv\begin{cases}+1 & (x'\text{ 比 }\sigma\text{ 早})\\ -1 & (x'\text{ 比 }\sigma\text{ 迟})\end{cases}$$

我们有

$$\Delta^{\sigma}(x;x')=\frac{1-\varepsilon(\sigma,x')}{2}\Delta^{\mathrm{ret}}(x-x')+\frac{1+\varepsilon(\sigma,x')}{2}\Delta^{\mathrm{adv}}(x-x'),$$

或

$$\Delta^{\sigma}(x;x')=\frac{\varepsilon(\sigma,x')-\varepsilon(x-x')}{2}\Delta(x-x'). \qquad [24.7]$$

确实，与 x' 的依赖性是复杂了；但是，与 x 的依赖性是与 $\bar{\Delta}(x-x')$中相同的. 这样

$$(\square-m^2)\Delta^{\sigma}(x;x')=-\delta^4(x-x'). \qquad [24.8]$$

如果 x 在 σ 上(记作 $x\subset\sigma$)，则

$$\left.\begin{aligned}&\Delta^{\sigma}(x;x')\big|_{x\subset\sigma}=0\\ &\left.\frac{\partial\Delta^{\sigma}(x;x')}{\partial x^{\mu}}\right|_{x\subset\sigma}=0\end{aligned}\right\}. \qquad [24.9]$$

并非所有二阶导数皆为零. 只有 4, 4 分量有贡献，其余皆无贡献. 我们得，

$$\left.\frac{\partial^2\Delta^{\sigma}(x;x')}{\partial x^4\partial x^4}\right|_{x\subset\sigma}=(\square-m^2)\Delta^{\sigma}(x,\sigma')\big|_{x\subset\sigma}=-\delta^4(x-x'),$$

所以

$$\left.\frac{\partial^2\Delta^{\sigma}(x;x')}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\right|_{x\subset\sigma}=+N_{\mu}N_{\nu}\delta^4(x-x'). \qquad [24.10]$$

而且，我们要求

$$\frac{\delta\Delta^{\sigma}(x;x')}{\delta\Omega(y)}=\delta^{4}(x'-y)\Delta(x-x'). \qquad [24.11]$$

这可由下述公式立即得到:

$$\frac{\delta\varepsilon(\sigma,x')}{\delta\Omega(y)}=2\delta^{4}(x'-y), \qquad [24.12]$$



图 24.1

由图 24.1, [24.12]是明显的.

显然, 我们必须定义,

$$\left.\begin{aligned} S^{\sigma}(x;x') &= \left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}-m\right)\Delta^{\sigma}(x;x') \\ D^{\sigma}(x;x') &= \Delta^{\sigma}(x;x')\big|_{m=0} \end{aligned}\right\}. \qquad [24.13]$$

利用这些函数, 除了入射场和出射场外, 我们还能确定自由场方程的更多的解, 这些解与一任意类空表面 σ 有关:

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(x,\sigma)-ie\int S^{\sigma}(x;x')\gamma^{\nu}\Phi_{\nu}(x')\psi(x')\mathrm{d}^{4}x' \\ \Phi_{\nu}(x) &= \Phi_{\nu}(x,\sigma)+\int D^{\sigma}(x;x')j^{\nu}(x')\mathrm{d}^{4}x' \end{aligned}\right\}. \qquad [24.14]$$

显然, 下列方程是正确的:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}+m\right)\psi(x,\sigma)=0 \\ &\Box\Phi_{\nu}(x,\sigma)=0 \end{aligned}\right\} \qquad [24.15]$$

(对于固定的 σ).

对于 $x\subset\sigma$, 由上述 Δ^{σ} 性质得:

$$\left.\begin{aligned} \psi(x,\sigma)\big|_{x\subset\sigma} &= \psi(x)\big|_{x\subset\sigma} \\ \Phi_{\nu}(x,\sigma)\big|_{x\subset\sigma} &= \Phi_{\nu}(x)\big|_{x\subset\sigma} \end{aligned}\right\}, \qquad [24.16]$$

而且, 与相互作用表象类似, 我们得,

$$\frac{\partial\Phi_{\nu}(x)}{\partial x^{\nu}}\cdot\Psi=\left(\frac{\partial\Phi_{\nu}(x,\sigma)}{\partial x^{\nu}}-\int_{\sigma}\mathrm{d}\sigma'^{\nu}j^{\nu}(x')D(x-x')\right)\Psi=0,$$

$$(\mathrm{d}\sigma^{\nu}=N_{\nu}\cdot\mathrm{d}\sigma). \qquad [24.17]$$

此外，自由场对易关系式仍然有效：

$$\left.\begin{aligned}\{\psi_\alpha(x,\sigma),\bar{\psi}_\beta(x',\sigma)\}&=-iS_{\alpha\beta}(x-x')\\ [\Phi_\mu(x,\sigma),\Phi_\nu(x',\sigma)]&=+i\delta_{\mu\nu}D(x-x')\end{aligned}\right\}. \qquad [24.18]$$

注：当 $\sigma\to+\infty$ 时，$F(x,\sigma)\to F^{\text{out}}(x)$；

当 $\sigma\to-\infty$ 时，$F(x,\sigma)\to F^{\text{in}}(x)$。

恰与前同，现在我们得出结论，存在一幺正变换，$U(\sigma,\sigma')$：

$$F(x,\sigma)=U^{-1}(\sigma,\sigma')F(x,\sigma')U(\sigma,\sigma'), \qquad [24.19]$$

这里，得到特殊情况是：

$$U(+\infty,-\infty)=S. \qquad [24.20]$$

乘法性质：

$$U(\sigma,\sigma')=U(\sigma'',\sigma')U(\sigma,\sigma'') \qquad [24.21]$$

保持有效，这是主要的．由此，立即得出：

$$\frac{\delta U(\sigma,\sigma')}{\delta\Omega(x)}=U(\sigma,\ \sigma')\frac{\delta U(\sigma,\sigma)}{\delta\Omega(x)} \qquad (x\subset\sigma), \qquad [24.22]$$

其中 $\delta U(\sigma,\sigma)/\delta\Omega(x)$ 的确切意义是：

$$\lim_{\delta\sigma\to 0}\frac{U(\sigma+\delta\sigma(x),\sigma)-U(\sigma,\sigma)}{\delta\Omega(\sigma,x)}.$$

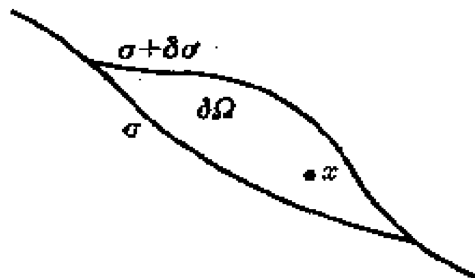


图 24.2

如果我们定义：

$$\frac{\delta U(\sigma,\sigma)}{\delta\Omega(x)}\equiv-i\mathscr{H}_{\text{int}}(x,\sigma)\big|_{x\subset\sigma}, \qquad [24.23]$$

于是得：

$$\frac{\delta U(\sigma,\sigma')}{\delta\Omega(x)}=-iU(\sigma,\sigma')\mathscr{H}_{\text{int}}(x,\sigma)\big|_{x\subset\sigma}.$$

因方程[24.19]，亦有，

$$\frac{\delta U(\sigma,\sigma')}{\delta\Omega(x)}=-i\mathscr{H}_{\text{int}}(x,\sigma')U(\sigma,\sigma') \quad (x\subset\sigma). \qquad [24.24]$$

我们定义 $\mathscr{H}_{\text{int}}(x,-\infty)\equiv\mathscr{H}_{\text{int}}(x)$．而且，由方程[24.19]得：

$$i\frac{\delta F(x,\sigma)}{\delta\Omega(x')}=[F(x,\sigma),\mathscr{H}_{\text{int}}(x',\sigma)]\Big|_{x'\subset\sigma}. \qquad [24.25]$$

为了建立与旧理论的联系，我们必须指出，这里 $\mathscr{H}_{\text{int}}$ 是与以前的 $\mathscr{H}_{\text{int}}$ 相同的．由方程[24.14]，

$$\left.\begin{aligned}\psi(x)&=\psi(x,\sigma)-ie\int S^{\sigma}(x;x')\gamma^{\nu}\Phi_{\nu}(x')\psi(x')\mathrm{d}^4x'\\ \Phi_{\nu}(x)&=\Phi_{\nu}(x,\sigma)+\int D^{\sigma}(x;x')j^{\nu}(x')\mathrm{d}^4x'\end{aligned}\right\}.$$

应用 $\delta/\delta\Omega(x')$，得

$$\frac{\delta\psi(x,\sigma)}{\delta\Omega(x')}=ie\int\frac{\delta S^{\sigma}(x;x'')}{\delta\Omega(x')}\gamma^{\nu}\Phi_{\nu}(x'')\psi(x'')\mathrm{d}^4x'',$$

$$\frac{\delta\Phi_{\nu}(x,\sigma)}{\delta\Omega(x')}=-\int\frac{\delta D^{\sigma}(x;x'')}{\delta\Omega(x')}j^{\nu}(x')\mathrm{d}^4x''.$$

因为

$$\frac{\delta S^{\sigma}(x;x'')}{\delta\Omega(x')}=\delta^4(x'-x'')S(x-x'),$$

$$\frac{\delta D^{\sigma}(x;x'')}{\delta\Omega(x')}=\delta^4(x'-x'')D(x-x'),$$

正如前面所看到的，从而有

$$\begin{aligned}[\psi(x,\sigma),\mathscr{H}_{\text{int}}(x'\sigma)]|_{x'\subset\sigma}&=-eS(x-x')\gamma^{\nu}\Phi_{\nu}(x')\psi(x')\\&=-eS(x-x')\gamma^{\nu}\Phi_{\nu}(x',\sigma)\psi(x',\sigma)|_{x'\subset\sigma},\\ [\Phi_{\nu}(x,\sigma),\mathscr{H}_{\text{int}}(x',\sigma)]|_{x'\subset\sigma}&=-iD(x-x')j^{\nu}(x')\\&=-iD(x-x')j^{\nu}(x',\sigma)|_{x'\subset\sigma},\end{aligned}$$

这里我们还用了方程[24.16]．$\mathscr{H}_{\text{int}}$ 被唯一确定到 c 数；于是 U 被确定到一个我们不感兴趣的 c 数相因子．其解是：

$$\mathscr{H}_{\text{int}}(x',\sigma)|_{x'\subset\sigma}=-j^{\nu}(x',\sigma)\Phi_{\nu}(x',\sigma)|_{x'\subset\sigma},$$

所以

$$\mathscr{H}_{\text{int}}(x,\sigma)=-j^{\nu}(x,\sigma)\Phi_{\nu}(x,\sigma).$$

一种特殊情况是：

$$\mathscr{H}_{\text{int}}(x)=-j^{\nu\,\text{int}}(x)\Phi_{\nu}^{\text{int}}(x). \qquad [24.26]$$

自旋为零粒子的杨振宁-费德曼形式

场方程式是:

$$
\begin{aligned}
&(\Box-m^2)\psi(x)\\
&=+ie\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\Phi_\mu(x)\psi(x)+\Phi_\mu(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu}\right]\\
&\quad+e^2\Phi_\mu(x)\Phi_\mu(x)\psi(x),\\
&\Box\Phi_\mu(x)\\
&=-j^\mu(x)=-ie\left(\frac{\partial\psi^*(x)}{\partial x^\mu}\psi(x)-\psi^*(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu}\right)\\
&\quad+2e^2\Phi_\mu(x)\psi^*(x)\psi(x).
\end{aligned}
$$

于是我们定义:

$$
\left.
\begin{aligned}
\psi(x)=\psi(x,\sigma)-ie\Big\{&\frac{\partial}{\partial x^\nu}\int\Delta^\sigma(x;x')\Phi_\nu(x')\psi(x')\mathrm{d}^4x'\\
&+\int\Phi_\nu(x')\frac{\partial\psi(x')}{\partial x'^\nu}\Delta^\sigma(x;x')\mathrm{d}^4x'\Big\}\\
&-e^2\int\Phi_\nu(x')\Phi_\nu(x')\psi(x')\Delta^\sigma(x;x')\mathrm{d}^4x'\\
\Phi_\nu(x)=\Phi_\nu(x,\ \sigma)+&\int D^\sigma(x;x')j^\nu(x')\mathrm{d}^4x'
\end{aligned}
\right\}, \tag{24.27}
$$

(与前相同,但有一新的 j^μ),于是,

$$
\left.
\begin{aligned}
&(\Box-m^2)\psi(x,\sigma)=0\\
&\Box\Phi_\mu(x,\sigma)=0
\end{aligned}
\right\}. \tag{24.28}
$$

此外,因为当 $x\subset\sigma$ 时, $\Delta^\sigma(x;x')$的一阶导数为零,而二阶导数不为零,所以立即可以看出:

$$
\begin{cases}
\psi(x)|_{x\subset\sigma}=\psi(x,\sigma)|_{x\subset\sigma},\\
\Phi_\nu(x)|_{x\subset\sigma}=\Phi_\nu(x,\sigma)|_{x\subset\sigma},\\
\left.\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x^\nu}\right|_{x\subset\sigma}=\left.\dfrac{\partial\psi(x,\sigma)}{\partial x^\nu}\right|_{x\subset\sigma}-ieN_\mu N_\nu\Phi_\nu(x,\sigma)\psi(x,\sigma)\Big|_{x\subset\sigma}.
\end{cases}
$$

这有一个简单的意义. 对于 $t=$常数的表面,我们有:

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial \boldsymbol{x}}\bigg|_{x\subset\sigma}=\frac{\partial\psi(x,\sigma)}{\partial \boldsymbol{x}}\bigg|_{x\subset\sigma},$$

$$\frac{\partial\psi(x,\sigma)}{\partial t}\bigg|_{x\subset\sigma}=\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}\bigg|_{x\subset\sigma}+ie\Phi_0(x)\psi(x)|_{x\subset\sigma}$$

$$=\pi^*(x)|_{x\subset\sigma}.$$

在物理学上，这必须是正确的，的确因为，$\psi(x,\sigma)$必须满足自由场方程式和对易关系式；因此，在时间不变的情况下，$\psi(x,\sigma)$的导数必须简化为π.

于是，和前面一样，当自旋为$\frac{1}{2}$时，我们得：

$$\frac{\delta\psi(x,\sigma)}{\delta\Omega(x')}=ie\left\{\frac{\partial\Delta(x-x')}{\partial x^\nu}\Phi_\nu(x',\sigma)\psi(x',\sigma)\right.$$

$$\left.+\Delta(x-x')\Phi_\nu(x',\sigma)\frac{\partial\psi(x',\sigma)}{\partial x'^\nu}\right\}\bigg|_{x'\subset\sigma}$$

$$+e^2\Phi_\nu(x',\sigma)\Phi_\nu(x',\sigma)\psi(x',\sigma)\Delta(x-x')|_{x'\subset\sigma}$$

$$+e^2(\Phi_\nu(x',\sigma)N^\nu)^2\psi(x',\sigma)\Delta(x-x')|_{x'\subset\sigma}.$$

因为

$$i\frac{\delta\psi(x,\sigma)}{\delta\Omega(x')}=[\psi(x,\sigma),\mathscr{H}(x',\sigma)]|_{x'\subset\sigma},$$

则得

$$\mathscr{H}_{\text{int}}(x',\sigma)$$

$$=ie\Phi_\nu(x',\sigma)\left[\psi^*(x',\sigma)\frac{\partial\psi(x',\sigma)}{\partial x'^\nu}-\frac{\partial\psi^*(x',\sigma)}{\partial x'^\nu}\psi(x',\sigma)\right]$$

$$+e^2\Phi_\nu(x',\sigma)\Phi_\nu(x',\sigma)\psi^*(x',\sigma)\psi(x',\sigma)$$

$$+e^2(N_\nu\Phi_\nu(x',\sigma))^2\psi^*(x',\sigma)\psi(x',\sigma). \qquad [24.29]$$

这样，我们再次得到了相互作用表象中的表式.

§25. 海森伯表象中的重正化场

方程[11.15]指出了，因为与光子场的耦合，所有电流都要乘

一因子:

$$1+\gamma \equiv \frac{e}{e_0}, \qquad 其中\ \gamma=\frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{m}{M}.$$

(我们已经注意到了,这里存在关于这个因子大小的定义问题. 按照许温格的方法, 得到的值比前述费因曼方法得的值大两倍. 这里,我们将继续用费因曼值.)

我们已经指出,附加电流是: (见方程[8. 3])

$$j^{\mu\,\mathrm{pol}}=\frac{i}{2}\int\langle[j^\mu(x), j^\nu(x')]\rangle_0 \varepsilon(x-x')\mathscr{A}_\nu(x')\mathrm{d}^4x',$$

并且,由于方程[7. 14],

$$\frac{i}{2}\langle[j^\mu(x), j^\nu(x')]\rangle_0 \varepsilon(x-x')=-e^2\overline{K}_{\mu\nu}(x-x'),$$

则

$$j^{\mu\,\mathrm{pol}}=-e^2\int\overline{K}_{\mu\nu}(x-x')\mathscr{A}_\nu(x')\mathrm{d}^4x' \qquad [25.1]$$

于是,由于方程[11. 7],

$$j^{\mu\,\mathrm{pol}}=2\gamma j^\mu+c_1\Box j^\mu+c_2\Box\Box j^\mu+\cdots, \qquad [25.2]$$

现在,应预料到恰如电流一样,所有的场也都要乘$(1+\gamma)$. 于是我们考虑"重正化场",

$$\Phi_\mu^R(x)=\frac{1}{1+\gamma}\Phi_\mu(x)=(1-\gamma+\cdots)\Phi_\mu(x). \qquad [25.3]$$

不管有没有相互作用,对于非重正化场,正则对易关系式

$$i[\Phi_\mu(\boldsymbol{x}, t), \Phi_\nu(\boldsymbol{x}', t)]=\delta_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \qquad [25.4]$$

继续有效. 这是"强"非规范不变形式. 如果我们需要规范不变表式,那么我们可以考虑:

$$i[E_x(\boldsymbol{x}, t), H_y(\boldsymbol{x}, t)]=\frac{\partial}{\partial z}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\ (和循环置换). \qquad [25.5]$$

现在根据约斯特(Jost)的未发表的文章, 我们将考虑重正化

场的对易关系式:

$$i[\Phi_\mu^R(\boldsymbol{x}, t), \Phi_\nu^R(\boldsymbol{x}' t)] = \frac{1}{(1+\gamma)^2}\delta_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

$$= (1-2\gamma+\cdots)\delta_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

[25.6]

或

$$i[E_x^R(\boldsymbol{x}, t), H_y^R(\boldsymbol{x}', t)] = (1-2\gamma+\cdots)\frac{\partial}{\partial z}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').$$

[25.7]

我们将证明,在这些表达式中显然存在着无穷大,以致于场强度对时空区域求平均的对易关系式的真空期待值是有限的:

$$i\left\langle\left[\int_{G_1} F_{\mu\rho}^R(x')\mathrm{d}^4x',\ \int_{G_2} F_{\nu\sigma}^R(x')\mathrm{d}^4x'\right]\right\rangle_0 = \text{有限}$$

[25.8]

场方程式是:

$$\left(\gamma^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}+m\right)\psi = ie\gamma^\nu\psi\Phi_\nu(x),$$

$$\bar{\psi}\left(\gamma^\nu\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\nu}-m\right) = -ie\bar{\psi}\gamma^\nu\Phi_\nu(x),$$

$$\Box\Phi_\nu = -j^\nu = -ie\bar{\psi}\gamma^\nu\psi.$$

根据杨振宁和费德曼,我们作如下分解(式[24.1]):

$$\psi(x) = \psi^{\mathrm{in}}(x) - ie\int S^{\mathrm{ret}}(x-x')\gamma^\nu\psi(x')\Phi_\nu(x')\mathrm{d}^4x',$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{\mathrm{in}}(x) - ie\int\bar{\psi}(x')\gamma^\nu S^{\mathrm{adv}}(x'-x)\Phi_\nu(x')\mathrm{d}^4x',$$

$$\Phi_\nu(x) = \Phi_\nu^{\mathrm{in}}(x) + \int D^{\mathrm{ret}}(x-x')j^\nu(x')\mathrm{d}^4x'.$$

我们想要计算$\langle[\Phi_\mu(x), \Phi_\nu(x')]\rangle_0$直到$e^2$阶项,因此在下列展开式中:

$$\Phi_\mu = \Phi_\mu^{(0)} + \Phi_\mu^{(1)} + \Phi_\mu^{(2)} + \cdots$$

关于 e 的幂次，计算到 $\Phi_\mu^{(2)}$ 项就足够了．于是，我们有：

$$\begin{aligned}[\Phi_\mu(x), \Phi_\nu(x')]^{(2)} = & [\Phi_\mu^{(1)}(x), \Phi_\nu^{(1)}(x')] \\ & + [\Phi_\mu^{(0)}(x), \Phi_\nu^{(2)}(x)] \\ & + [\Phi_\mu^{(2)}(x), \Phi_\nu^{(0)}(x')].\end{aligned}$$

因为

$$\Phi_\nu^{(2)}(x) = \int D^{\mathrm{ret}}(x-x') j^{\nu(2)}(x') \mathrm{d}^4 x',$$

足以用来计算 $j^{\nu(2)}$．由于 $j^\mu = ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 中含有 e 的因子，所以 j^μ 的展开式由 $j^{\mu(1)}$ 开始，于是

$$j^{\mu(2)}(x) = ie(\bar{\psi}^{(1)}\gamma^\mu\psi^{(0)} + \bar{\psi}^{(0)} j^\mu \psi^{(1)}),$$

$$\psi^{(1)}(x) = -ie\int S^{\mathrm{ret}}(x-x')\gamma^\nu\psi^{(0)}(x')\Phi_\nu^{(0)}(x')\mathrm{d}^4 x'.$$

因此，

$$\begin{aligned}j^{\mu(2)}(x) = e^2\int & \{\bar{\psi}^{(0)}(x)\gamma^\mu S^{\mathrm{ret}}(x-x')\gamma^\nu\psi^{(0)}(x') \\ & + \bar{\psi}^{(0)}(x')\gamma^\nu S^{\mathrm{adv}}(x'-x)\gamma^\mu\psi^{(0)}(x)\}\Phi_\nu^{(0)}(x')\mathrm{d}^4 x'.\end{aligned}$$

现在，我们有

$$S^{\mathrm{ret}} = \bar{S} - \frac{1}{2}S,$$

$$S^{\mathrm{adv}} = \bar{S} + \frac{1}{2}S.$$

有 S 的项对积分无贡献，因为在第一级中无实际过程．数学上：

$$\int S(x-x')\gamma^\nu\psi^{(0)}(x')\Phi_\nu^{(0)}(x')\mathrm{d}^4 x' = 0,$$

和

$$\int \bar{\psi}^{(0)}(x')\gamma^\nu S(x'-x)\Phi_\nu^{(0)}(x')\mathrm{d}^4 x' = 0.$$

在动量空间中，这些表达式包含 δ 函数（它来自 S），这表示能量和

动量二者都守恒．但是，正如大家所熟知的，由一自由电子发射一个光子是不可能的．

于是，应用下述公式：

$$\frac{i}{2}[j^{\mu(1)}(x), j^{\nu(1)}(x')]\varepsilon(x-x')$$
$$=e^2\{\bar{\psi}^{(0)}(x)\gamma^\mu\bar{S}(x-x')\gamma^\nu\psi^{(0)}(x')$$
$$+\bar{\psi}^{(0)}(x')\gamma^\nu\bar{S}(x'-x)\gamma^\mu\psi^{(0)}(x)\},$$

我们得到表达式[25.9]：

$$j^{\mu(2)}(x)=\frac{i}{2}\int[j^{\mu(1)}(x), j^{\nu(1)}(x')]\varepsilon(x-x')\Phi_\nu^{(0)}(x')\mathrm{d}^4x'. \quad [25.9]$$

因

$$\Phi_\mu^{(2)}(x)=\int D^{\mathrm{ret}}(x-x')j^{\mu(2)}(x')\mathrm{d}^4x',$$

则

$$\Phi_\mu^{(2)}(x)=\frac{i}{2}\int\mathrm{d}^4x'\int\mathrm{d}^4x''D^{\mathrm{ret}}(x-x')$$
$$\cdot[j^{\mu(1)}(x'), j^{\nu(1)}(x'')]\varepsilon(x'-x'')\Phi_\nu^{(0)}(x''), \qquad [25.10]$$

和

$$\Phi_\nu^{(1)}(x)=\int D^{\mathrm{ret}}(x-x')j^{\nu(1)}(x')\mathrm{d}^4x'$$
$$=\int\bar{D}(x-x')j^{\nu(1)}(x')\mathrm{d}^4x',$$

这是由于，和上述一样，我们考虑到：

$$\int D(x-x')j^{\nu(1)}(x')\mathrm{d}^4x'=0.$$

现在，我们来讨论重正化势 $\Phi_\mu^R(x)$．则按照电荷重正化的定义，有

$$\Phi_\mu^{R(2)}(x)$$

$$= \frac{i}{2}\int d^4x' \int d^4x'' D^{\text{ret}}(x-x')\{[j^{\mu(1)}(x'), j^{\nu(1)}(x'')]$$

$$-\langle[j^{\mu(1)}(x'), j^{\nu(1)}(x'')]\rangle_0\}\varepsilon(x'-x'')\Phi_\nu^{(0)}(x''). \quad [25.11]$$

注：在电荷重正化中，因子 2 不是唯一确定的困难是不重要的，因为我们的目的既不是 $\Phi_\mu^{(2)}$，也不是重正化，而只是差值 $\Phi_\mu^{R(2)}$，它是确定的，而且是有意义的.

形式上，

$$\frac{i}{2}\int d^4x' \int d^4x'' D^{\text{ret}}(x-x')\langle[j^{\mu(1)}(x'), j^{\nu(1)}(x'')]\rangle_0$$

$$\cdot\varepsilon(x'-x'')\Phi_\nu^{(0)}(x'')$$

$$= +\int d^4x' D^{\text{ret}}(x-x') j^{\mu\,\text{pol}}(x').$$

（见 § 8，那里，场 $\mathscr{A}_\mu$ 不是量子化的，但在形式上没有差异.）

于是，对 $j^{\mu\,\text{pol}}$ 有：

$$j^{\mu\,\text{pol}}(x) = -2\gamma\Box\Phi_\nu^{(0)} + c_1\Box\Box\Phi_\nu^{(0)} + \cdots,$$

其中 $\gamma+1=e/e_0$. 因为 $\Phi_\nu^{(0)}$是辐射场($\Box\Phi_\nu^{(0)}=0$)，我们肯定可以舍去高次项. 但是，第一项是 0/0 形式的不确定项，这在动量空间中最容易看出. 因为$\Box D^{\text{ret}}(x)=-\delta^4(x)$，用部分积分法作形式估计，得，

$$j^{\mu\,\text{pol}}(x) \sim 2\gamma\Phi_\mu^{(0)}(x).$$

如前所述，因子 2 不是唯一确定的. 但是，由此得出的结论是一样的，正如我们已经指出的，$\Phi_\mu^{R(2)}$是唯一确定的.

因此，我们有

$$\Phi_\mu^R(x) = \Phi_\mu^{(0)}(x) + \int\tilde{D}(x-x')j^{\mu(1)}(x')d^4x'$$

$$+\frac{i}{2}\int d^4x' \int d^4x'' D^{\text{ret}}(x-x')([j^{\mu(1)}(x'), j^{\nu(1)}(x'')]$$

$$-\langle[j^{\mu(1)}(x'), j^{\nu(1)}(x'')]\rangle_0)\varepsilon(x'-x'')\Phi_\nu^{(0)}(x'').$$

那么，最感兴趣的是 $\Phi_\mu^R(x)$的对易子的真空期待值：

$$\langle[\Phi_\mu^R(x),\Phi_\mu^R(x')]\rangle_0.$$

它由二次项加上，

$$i\delta_{\mu\nu}D(x-x')$$

零次项组成.

注：这只是在规范不变表达式中才是正确的.

由于重正化，来自

$$\langle[\Phi_\mu^{R(0)}(x),\Phi_\nu^{R(2)}(x')]\rangle_0$$

中的二次项贡献正好为零. 在真空期待值中，两个电流对易子直接抵消. 只留下

$$\langle[\Phi_\mu^R(x),\Phi_\nu^R(x')]\rangle_0^{(2)}=\langle[\Phi_\mu^{(1)}(x),\Phi_\nu^{(1)}(x')]\rangle_0,$$

或

$$\langle[\Phi_\mu^R(x),\Phi_\nu^R(x')]\rangle_0^{(2)}=\int d^4x''\int d^4x'''\bar{D}(x-x'')\cdot\langle[j^{\mu(1)}(x''),j^{\nu(1)}(x''')]\rangle_0\bar{D}(x''-x'''). \qquad [25.12]$$

在动量空间中，我们定义：

$$i\langle[\Phi_\mu^R(x),\Phi_\nu^R(x')]\rangle_0^{(2)}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int\exp[ip(x-x')]\Gamma_{\mu\nu}(p)d^4p. \qquad [25.13]$$

而且，在方程[7.5]中，我们有

$$\langle[j^{\mu(1)}(x''),j^{\nu(1)}(x''')]\rangle_0\equiv-2ie^2K_{\mu\nu}(x''-x''')=-\frac{2ie^2}{(2\pi)^4}\int\exp[ip(x''-x''')]K_{\mu\nu}(p)d^4p.$$

因为坐标空间公式只包含褶积，所以动量空间关系式只是一个乘积：

$$\Gamma_{\mu\nu}(p)=+2e^2\frac{1}{(p^2)^2}\cdot K_{\mu\nu}(p). \qquad [25.14]$$

由方程[7.11]和[10.1]得到 $K_{\mu\nu}(p)$：

$$K_{\mu\nu}(p)=i\epsilon(p)(p_\mu p_\nu-\delta_{\mu\nu}p^2)K(p^2),$$

$$K(p^2)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}\cdot\dfrac{-p^2+2m^2}{-3p^2}\sqrt{\dfrac{4m^2+p^2}{p^2}}, & p^2<-4m^2\\ 0, & \text{除上述条件外.}\end{cases}$$

正比于 $p_\mu p_\nu$ 的项对规范不变量无贡献，因此，这些项实际上是无物理意义的. 例如，我们可以考虑场强度，

$$i\langle[F^R_{\mu\rho}(x),F^R_{\nu\sigma}(x')]\rangle_0^{(2)}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int\exp[ip(x-x')]\Gamma_{\mu\rho\nu\sigma}(p)\mathrm{d}^4p, \tag{25.15}$$

$$\Gamma_{\mu\rho\nu\sigma}(p)=p_\mu p_\nu\Gamma_{\rho\sigma}(p)-p_\nu p_\rho\Gamma_{\mu\sigma}(p)\\-p_\mu p_\sigma\Gamma_{\rho\nu}(p)+p_\rho p_\sigma\Gamma_{\mu\nu}(p),$$

并且立即看出，在 $\Gamma_{\mu\nu}(p)$ 中舍去了正比于 $p_\mu p_\nu$ 的项. 因而，留下，

$$\Gamma_{\mu\rho\nu\sigma}(p)=\frac{2e^2}{(p^2)^2}(p_\mu p_\nu\delta_{\rho\sigma}-p_\nu p_\rho\delta_{\mu\sigma}\\-p_\mu p_\sigma\delta_{\rho\nu}+p_\rho p_\sigma\delta_{\mu\nu})(-p^2)K(p^2), \tag{25.16}$$

$$=-\frac{2e^2}{p^2}K(p^2)[p_\mu p_\nu\delta_{\rho\sigma}-p_\nu p_\rho\delta_{\mu\sigma}-p_\mu p_\sigma\delta_{\rho\nu}+p_\rho p_\sigma\delta_{\mu\nu}]. \tag{25.17}$$

我们将继续用非规范不变量进行计算，并在计算中简单地舍去 $p_\mu p_\nu$ 项.

关于正则形式：

$$i\langle[\dot{\Phi}_\mu(\boldsymbol{x},t),\Phi_\nu(\boldsymbol{x}',t)]\rangle_0^{(2)}\\=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{p})\exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]\mathrm{d}^3p, \tag{25.18}$$

其中，

$$\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{p})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-ip_0)\Gamma_{\mu\nu}(p)\mathrm{d}p_0. \tag{25.19}$$

若舍去 $p_\mu p_\nu$ 项，则

$$\Gamma_{\mu\nu}(p)=\delta_{\mu\nu}\cdot\Gamma(p), \tag{25.20}$$

这导致

$$\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{p})=-\frac{i}{2\pi}\delta_{\mu\nu}\int_{-\infty}^{+\infty}p_0\Gamma(p)\mathrm{d}p_0. \qquad [25.21]$$

注：为了严格起见，我们可以改用场强度进行计算，并考虑：

$$i\langle[E_x(\boldsymbol{x}',t),H_y(\boldsymbol{x}',t)]\rangle_0^{(2)}$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\cdot\frac{-i}{(2\pi)}\int ip_3\mathrm{d}^3p\int_{-\infty}^{+\infty}p_0\Gamma(p)\exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)]\mathrm{d}p_0. \qquad [25.22]$$

在我们的考虑中，这不产生本质变化，因为，如果我们对照零次项：

$$i\langle[\dot{\Phi}_\mu(\boldsymbol{x},t),\Phi_\nu(\boldsymbol{x}',t)]\rangle_0^{(0)}=\delta_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\delta_{\mu\nu}\int\exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]\mathrm{d}^3p$$

和

$$i\langle[E_x(\boldsymbol{x},t),H_y(\boldsymbol{x}',t)]\rangle_0^{(0)}=\frac{\partial}{\partial z}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int ip_3\exp(i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]\mathrm{d}^3p,$$

于是，我们看出，由零次项插入因子：

$$\gamma(\boldsymbol{p})=-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}p_0\Gamma(p)\mathrm{d}p_0 \qquad [25.23]$$

得到二次项，对场强度是这样，对于势也是这样. 我们将指出，这因子是常数：

$$\gamma(\boldsymbol{p})=\frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}p_0\Gamma(p)\mathrm{d}p_0$$
$$=\frac{2e^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{p^2<-4m^2}p_0\varepsilon(p_0)\cdot\frac{1}{p^2}$$
$$\cdot\frac{-p^2+2m^2}{-3p^2}\sqrt{\frac{p^2+4m^2}{p^2}}\mathrm{d}p_0.$$

因为

$$p_0\cdot\varepsilon(\boldsymbol{p})=|p_0|$$

和
$$z=-(p^2+4m^2)>0,$$

则

$$\gamma(\boldsymbol{p}) \simeq \frac{e^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{z+6m^2}{(z+4m^2)^2}\sqrt{\frac{z}{z+4m^2}}\mathrm{d}z, \qquad [25.24]$$

这是对数型发散常数．我们进行规则化：

$$\gamma(\boldsymbol{p}) = \gamma(\boldsymbol{p}; m) - \gamma(\boldsymbol{p}; M).$$

令 $z = 4m^2 u$ 和

$$\gamma_z(\boldsymbol{p}) = \frac{e^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^z \mathrm{d}z\cdots.$$

于是，

$$\gamma_z(\boldsymbol{p}) = \frac{e^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^{z/4m^2} \frac{u+\dfrac{2}{3}}{(u+1)^2}\sqrt{\frac{u}{u+1}}\mathrm{d}u$$

$$z \gg 4m^2,\ 4M^2,$$

$$\tilde{\gamma}(\boldsymbol{p}) = \frac{e^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{3}\int_{z/4M^2}^{z/4m^2} \frac{u+\dfrac{2}{3}}{(u+1)^2}\sqrt{\frac{u}{u+1}}\mathrm{d}u.$$

且因 $e^2/4\pi = \alpha$,

$$\tilde{\gamma}(\boldsymbol{p}) \cong \frac{\alpha}{3\pi}\int_{z/4M^2}^{z/4m^2} u^{-1}\mathrm{d}u + O(1) = \frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{M^2}{m^2} + O(1),$$

所以

$$\tilde{\gamma}(\boldsymbol{p}) = -2\gamma. \qquad [25.25]$$

其中

$$\gamma = \frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{m}{M}.$$

（戴逊-费因曼重正化）．于是，

$$i\langle[\dot{\Phi}_\mu(\boldsymbol{x}, t), \Phi_\nu(\boldsymbol{x}', t)]\rangle_0 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \delta_{\mu\nu}\int \chi(\boldsymbol{p})\exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]\mathrm{d}^3p,$$

其中

$$\chi(\boldsymbol{p}) = 1 + \gamma(\boldsymbol{p}) + \cdots = 1 - 2\gamma + \cdots,$$

这是一种验证，虽然在物理学上不是意味深长的．$\Gamma(p^2)$是有限的，这点是本质的；即，

$$
\begin{aligned}
& i\langle[\Phi_{\mu}^{R}(x), \Phi_{\nu}^{R}(x')]\rangle_0^{(2)} \\
& =\delta_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int \exp[ip(x-x')]\Gamma(p^2)\mathrm{d}^4 p,
\end{aligned}
$$

由于有了有限的 $\Gamma(p^2)$，对非重正化场将得到：

$$
\begin{aligned}
& i\langle[\Phi_{\mu}(x), \Phi_{\nu}(x')]\rangle_0^{(2)} \\
& =\delta_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int \exp[ip(x-x')][\Gamma(p^2) \\
& \quad +2\gamma\varepsilon(p)\delta(p^2+m^2)]\mathrm{d}^4 p,
\end{aligned}
$$

这是无穷大．因为取$(t=t')$的方法是不正确的，所以得到一个发散的结果．相反地，如果G和G'是四维体积（或有锐边界，或无锐边界），则

$$
\begin{aligned}
& i\left\langle\left[\int_G \Phi_{\mu}^{R}(x)\mathrm{d}^4 x, \int_{G'} \Phi_{\nu}^{R}(x')\mathrm{d}^4 x'\right]\right\rangle_0^{(2)} \\
& =\delta_{\mu\nu}\int G(p)G(-p)\Gamma(p)\mathrm{d}^4 p, \qquad [25.26]
\end{aligned}
$$

其中因子G使得积分收敛，如果体积在时间坐标轴中是有限的话，（甚至当锐边界时）．

注：1．可以合理地假定——虽然我们没有证明它——对于自旋为零的粒子，类似的关系式也成立．

2．戴逊指望作普遍证明：对任何一个任意级近似，同样的结果是正确的．[A-7]

3．对于电流，而不是场，可以实现有点类似的过程[①]。

① G. KÄLLÉN, *Helv, Phys, Acta* 25, 417(1952).

第六章 S矩阵：应用

§26. S 矩阵和截面的关系

为了将戴逊公式应用于截面，我们写过(方程[22.5])：

$$U(-\infty, t)=1+\int_{-\infty}^{t} W(t')\mathrm{d}t'.$$

用与 H_0 对易的变量 q，我们写了(方程[22.6])：

$$(q_e|W(t)|q_a)=\frac{1}{2\pi}(q_e|R|q_a)\exp[i(\omega_e-\omega_a)t],$$

其中 a=初态，e=末态．如已提到的，这在一定条件下才是正确的．于是，单位时间内的跃迁几率为(方程[22.10])

$$W=|(q_e|R|q_a)|^2\frac{\delta(\omega)}{2\pi}.$$

如果我们专门讨论自由粒子的散射，则动量守恒必须成立．这表明 R 包含一关于动量的 δ 函数：

$$(q_e|R|q_a)=(q_e|\bar{R}|q_a)\delta^3\Big(\sum_{i=1}^{N'}p_i^a-\sum_{i=1}^{N}p_i^e\Big) \qquad [26.1]$$

其中 N' 个入射粒子的动量为 $p_1^a, p_2^a, \cdots, p_{N'}^a$，而 N 个出射粒子的动量为 $p_1^e, p_2^e, \cdots, p_N^e$. 这里，必须设想粒子的本征函数具有 δ 函数归一化：

$$\int\psi_p^*(x)\psi_{p'}(x)\mathrm{d}^3x=\delta^3(p-p'). \qquad [26.2]$$

但是，在下面，认为系统被封闭在体积为 G 的大盒中是有用的．于是边界条件产生分立谱，并按下式：

$$\int_G \Psi_p^*(x)\Psi_{p'}(x)\mathrm{d}^3x=\delta_{p,p'} \qquad [26.3]$$

进行归一化，其中

$$\delta_{p,p'}=\begin{cases}0 & \boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{p}',\\ 1 & \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}'.\end{cases}$$

当 $\alpha=(2\pi)^3/G$ 时，得到 $\Psi_p=\sqrt{\alpha}\Psi_p$. 于是，用这些函数计算的矩阵元成为

$$(q_e|R_G|q_a)=\alpha^{[(N+N')/2]-1}(q_e|\bar{R}|q_a)\delta_{P_a,P_e}, \qquad [26.4]$$

其中

$$\boldsymbol{P}_a\equiv\sum_1^{N'}\boldsymbol{p}_i^a,\quad \boldsymbol{P}_e\equiv\sum_1^{N}\boldsymbol{p}_i^e.$$

关于因子 $\alpha^{[(N+N')/2]-1}$ 的注：对每一个发射或吸收粒子出现一个因子 $\sqrt{\alpha}$；产生 δ_{p_a,p_e} 的空间积分得出因子 α^{-1}.

下面，我们专门讨论 $N'=2$，只有在这种情况中，能够意味深长地确定一截面．单位时间的跃迁几率是：

$$W=\frac{1}{2\pi}\cdot\alpha^N\cdot|(q_e|\bar{R}|q_a)|^2\delta_{P_aP_e}\delta(\omega). \qquad [26.5]$$

注：$(\delta_{p_a,p_e})^2=\delta_{p_a,p_e}$，这是转变到有限体积的理由.

单位时间和单位体积的跃迁几率是，

$$w=\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha^N}{G}|(q_e|\bar{R}|q_a)|^2\delta_{P_a,P_e}\delta(\omega_a-\omega_e). \qquad [26.6]$$

现在，我们需要详细说明初态和末态：

初态：$\boldsymbol{p}_1^a$, $\boldsymbol{p}_2^a$ 给定.

末态：1. $\boldsymbol{p}_1^e$ 方向上的 $\mathrm{d}\Omega$，在这里是给定的；$|\boldsymbol{p}_1^e|$ 是确定的（根据能量守恒）；

$$\mathrm{d}^3p_1^e=(p_1^e)^2\mathrm{d}p_1^e\cdot\mathrm{d}\Omega;$$

2. 这里，$\boldsymbol{p}_2^e$ 是完全确定的（根据动量守恒）；

3. 于是，$\boldsymbol{p}_3^e$, $\boldsymbol{p}_4^e$, …, $\boldsymbol{p}_N^e$ 位于 $\mathrm{d}^3p_3^e\mathrm{d}^3p_4^e\cdots\mathrm{d}^3p_N^e$ 中．对于这样一种

过程,单位时间,单位体积的跃迁几率是:

$$w=\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha^N}{G}\Sigma|(q_e|\bar{R}|q_a)|^2\delta_{P_a,P_e}\delta(\omega_a-\omega_e), \qquad [26.7]$$

其中 Σ 必须对末态在动量的整个空间区域求和.将这求和变回到积分,产生下列因子:

$$\left.\begin{array}{ll}(1/\alpha)^{N-2} & \text{由 } p_3^e, p_4^e, \cdots, p_N^e \text{ 产生}\\ 1/\alpha & \text{由 } p_1^e \text{ 产生}\end{array}\right\},$$

因为

$$\sum_P\cdots=\frac{1}{\alpha}\int d^3p\cdots$$

于是,

$$\begin{aligned}w&=\frac{d\Omega}{2\pi}\cdot\frac{(2\pi)^3}{G^2}\int dp_1^e(p_1^e)^2\delta(\omega_a-\omega_e)|\bar{R}|^2d^3p_3^e\cdots d^3p_N^e\\&=\frac{d\Omega}{2\pi}\cdot\frac{(2\pi)^3}{G^2}\int dp_1^e(p_1^e)^2\delta(\omega_a-\omega_e)|\bar{R}|^2d^{3(N-2)}p\\&=\frac{(2\pi)^2}{G^2}d\Omega d^{3(N-2)}p(p_1^e)^2\left(\frac{dp_1^e}{d\omega}\right)|(q_e|\bar{R}|q_a)|^2, \qquad [26.8]\end{aligned}$$

其中,凡满足能量和动量守恒的值都必须代换.

截面的定义

作为微分截面 $d\sigma$ 的定义,我们写出:

$$w=\rho_1^a\rho_2^a|v_1^a-v_2^a|\cdot d\sigma, \qquad [26.9]$$

其中 ρ_1^a, ρ_2^a = 粒子 p_1^a, p_2^a 的密度,

v_1^a, v_2^a = 粒子的速度.

可是,我们有

$$\rho_1^a=\rho_2^a=\frac{1}{G}.$$

于是,

$$d\sigma=\frac{(2\pi)^2}{|v_1^a-v_2^a|}|(q_e|\bar{R}|q_a)|^2\cdot(p_1^e)^2\left(\frac{dp_1^e}{d\omega^e}\right)\cdot d\Omega d^{3(N-2)}p.$$

[26.10]

这里

$$(q_e|S-1|q_a)=(q_e|\bar{\bar{R}}|q_a)\delta(\omega_a-\omega_e)\delta^3(\boldsymbol{P}_a-\boldsymbol{P}_e).$$

§27. 戴逊形式的应用：摩勒散射

根据戴逊，对于两电子的摩勒散射，我们得：

$$S_2=\frac{(-i)^2}{2!}\int d^4x\int d^4x' P(\mathscr{H}_{\text{int}}(x)\mathscr{H}_{\text{int}}(x')). \qquad [27.1]$$

由于

$$\mathscr{H}_{\text{int}}(x)=-j^\mu\Phi_\mu=-ie(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\Phi_\mu,$$

得

$$S_2=+\frac{e^2}{2}\int d^4x\int d^4x' P(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\cdot\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi')P(\Phi_\mu\Phi'_\nu),$$

式中

$$\psi\equiv\psi(x), \qquad \psi'\equiv\psi(x'), \text{等}.$$

因为ψ和Φ对易，故将P分离为两部分.

我们考虑关于光子P乘积的真空期待值：

$$\langle P(\Phi_\mu\Phi'_\nu)\rangle_{0\,\text{ph}}=\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}D^C(x-x'),$$

按照戴逊定理[15.27]，如果核满足发散条件，自然会得到这样的积分. 事实上当然如此. 因为我们只考虑二个电子的吸收和另外二电子的发射(许温格的“二电子项”)，所以我们可以舍去作用于ψ上的P. 于是，因为含有j^μ的对易子至多是“单电子项”，所以我们可以认为j^μ是对易的.

对于二自由电子的散射，我们用平面波代替ψ:

$$\psi(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}u(\boldsymbol{p})\exp[i(px)]a(p),$$

其中

$$(px)=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-\sqrt{p^2+m^2}\cdot t, \quad a(p)=\text{吸收算符}.$$

然后将其归一化:

$$\int \psi_p^*(x)\psi_{p'}(x)\mathrm{d}^3x=\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot a^*(p)a(p),$$

所以

$$u^*(p)u(p)=1.$$

至于 ψ,我们应该用对应于不同动量的四个平面波之和来代替:

$$\psi(x)=\psi_{p_1}(x)+\psi_{p_2}(x)$$
$$+\psi_{p_3}(x)+\psi_{p_4}(x).$$

因为我们只想考虑这样的跃迁:吸收 p_1 和 p_2,发射 p_3 和 p_4,所以我们能够更简单地写作:

$$\psi(x)=\psi_{p_1}+\psi_{p_2},$$
$$\bar{\psi}(x)=\bar{\psi}_{p_3}+\bar{\psi}_{p_4}.$$

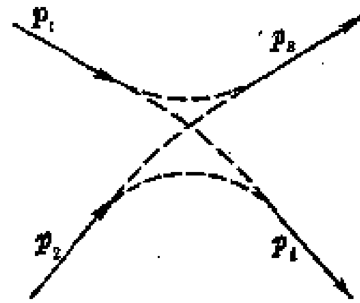


图 27.1

于是,存在四种情况:

	ψ	ψ'	$\bar{\psi}$	$\bar{\psi}'$
1	1	2	3	4
2	2	1	3	4
3	1	2	4	3
4	2	1	4	3

在这中间,情况 1 和 4 之间的差异,以及 2 和 3 之间的差异只是交换积分变量. 因此,我们能够例如限于讨论情况 1 和 2, 引入因子 2, 则

$$S_2=\frac{e^2}{4}\cdot 2\int \mathrm{d}^4x\int \mathrm{d}^4x'[(\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_1)(\bar{\psi}'_4\gamma^\mu\psi'_2)$$
$$+(\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_2)(\bar{\psi}'_4\gamma^\mu\psi'_1)]D^c(x-x').$$

若以 D^c 的傅里叶表达式[13.12]:

$$D^C(x)=\frac{-2i}{(2\pi)^4}\int\frac{\exp[i(kx)]}{k^2-i\mu^2}\mathrm{d}^4k.$$

代入上式，最后令 $\mu\to 0$，则得：

$$S_2=\frac{-ie^2}{(2\pi)^2}\int\left[\frac{(\bar{u}_3\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)}{k^2-i\mu^2}\delta^4(p_2-p_4+k)\right.$$
$$\left.\cdot\delta^4(p_1-p_3-k)-(3\leftrightarrow 4)\right]\mathrm{d}^4k.$$

现在，我们必须注意到：由于以 δ 函数表示的能量-动量守恒，k^2 不可能是零、本质上说，这是因为我们用自由粒子(平面波)进行计算的缘故. 于是，我们能够不考虑 $-i\mu^2$ 进行积分，而得：

$$S_2=\frac{-ie^2}{(2\pi)^2}\left[\frac{(\bar{u}_3\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)}{(p_3-p_1)^2}\right.$$
$$\left.-\frac{(\bar{u}_3\gamma^\mu u_2)(\bar{u}_4\gamma^\mu u_1)}{(p_4-p_1)^2}\right]\cdot\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4). \quad [27.2]$$

根据对方程[26.10]的处理方法，我们得到截面公式：

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{e^4}{(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{v}|\boldsymbol{p}_3|^2\left(\frac{\mathrm{d}(\omega_3+\omega_4)}{\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_3|}\right)^{-1}$$
$$\cdot\left|\left[\frac{(\bar{u}_3\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)}{(p_3-p_1)^2}-\frac{(\bar{u}_3\gamma^\mu u_2)(\bar{u}_4\gamma^\mu u_1)}{(p_4-p_1)^2}\right]\right|^2\mathrm{d}\Omega.$$

[27.3]

注：我们用了亥维塞单位. 则 $e^2=4\pi/137$.

§ 28. D^C 函数的讨论①

在摩勒散射中，D^C 函数的特性是不重要的，因为，由于不存在粒子之间的作用力，在 $k^2=0$ 时的奇异性完全不是本质的. 但是如果我们，例如，取外静止场中的稳定解作为 ψ，这种特征就不出现，因而我们能够认出 D^C 函数的物理上重要的性质.

于是，令

① M. FIERZ. *Helv. Phys. Acta* **23**, 731(1950).

$$\psi(x)=u_n(x)\exp[-i\omega t]\cdot a(\omega)$$
$$+v_n^*(x)\exp[+i\omega' t]\cdot a^*(\omega'),\ \omega,\ \omega'>0.$$

本质是，吸收伴有 $\exp[-i\omega t]$项，发射伴有 $\exp[+i\omega t]$项，当然，对 $\overline{\psi}=\psi^*\gamma^4$，这也是正确的．其中

$$\psi^*(x)=u_n^*(x)\exp[+i\omega t]\cdot a^*(\omega)$$
$$+v_n(x)\exp[-i\omega' t]\cdot a(\omega'),$$

而且，对于任意场都是普遍正确的．

现在，我们必须考虑这样的过程，跃迁出现在明显分开的时空区域V_x和V_y．我们想要验证下面说法是否正确：如果带电粒子的能量在 V_x 中增加 ω_0，又如果在 V_y 中能量减少，那么 V_x 在时间上比 V_y迟：$t_x>t_y$．显然，这是指先发射光子而后又吸收光子．于是，根据测不准关系，在 V_x 中能量的增量 ω_0 的测不准量 $\Delta\omega$，大于 $1/T$，其中 T 是 V_x 的时间延伸：

$$\Delta\omega>\frac{1}{T}.$$

另一方面，必须是 $\Delta\omega\ll\omega_0$，因为否则能量改变的符号将不确定．因而，仅当

$$T\omega_0\gg1 \qquad [28.1]$$

时，同时指出 $\omega_0>0$ 和 $t_x>t_y$ 才是有意义的．根据§27所述，由于在 V_x 和 V_y 中跃迁所引起的那部分S矩阵是：

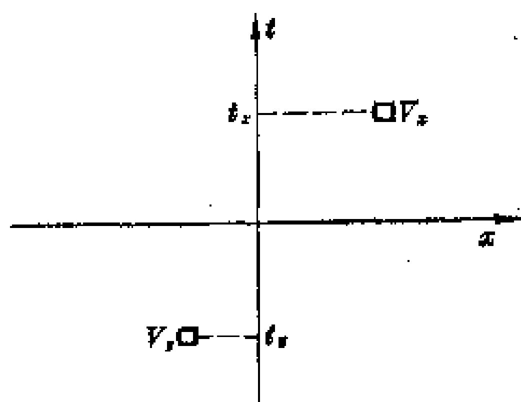


图 28.1

$$\text{常数}\times\int_{V_x}d^4x\int_{V_y}d^4y(\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x))$$
$$\cdot D^C(x-y)(\overline{\psi}(y)\gamma^\mu\psi(y)).$$

现在我们认为这些过程：(1)在 V_x 中，物质能量增加，(2)在 V_y 中，物质能量减少，而且还要证明，在基本不等式[28.1]的限制下，

1必须比2迟．这就是日内瓦学派所谓的“因果性”①．

对于V_x，我们写作：

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\sim a_1a_2^*\rho_\mu(\boldsymbol{x})\exp\left[+i\omega_0t-\frac{t^2}{T^2}\right];$$

$$\omega_0\equiv\omega_2-\omega_1>0.$$

这里，$\exp[-t^2/T^2]$是在时间方向上限制V_x的函数；空间部分由$\rho(\boldsymbol{x})$表示．V_x的中心时间点标准化为$t=0$．当然，因子

$$\exp[+i\omega_0t-t^2/T^2]$$

也包含负频率；它的傅里叶分析示于图28.2.

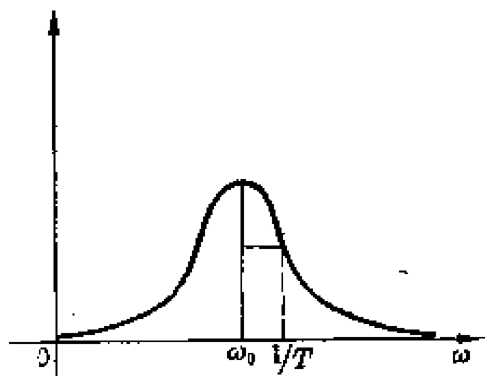


图 28.2

因为$\omega_0T\gg1$，曲线是很窄的，所以它的负傅里叶振幅是任意地小．而且，我们有(参较方程[13.15])：

$$D^C=-2i[(D^{\mathrm{adv}})^-+(D^{\mathrm{ret}})^+].$$

$(D^{\mathrm{adv}})^-$容易去掉，它只包含时间因子$\exp[+i\omega t]$，所以整个结果是$\exp[+i(\omega_0+\omega)t_x]$．因为$T\gg1/\omega_0$，这些时间因子对积分几乎不作贡献．因为只有$(D^{\mathrm{ret}})^+$，所以积分变为：

$$\int\mathrm{d}^3x\rho_\mu(\boldsymbol{x})\int\mathrm{d}t_x\int_{V_y}\mathrm{d}^4y\frac{1}{8\pi r}\left[\delta(r+t_y-t_x)+\frac{i}{\pi(r+t_y-t_x)}\right]\cdot\exp\left[i\omega_0t_x-\frac{t_x^2}{T^2}\right]\cdot(\bar{\psi}(y)\gamma^\mu\psi(y)),$$

式中$r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$，并将指出，与$\delta$函数项相比较，我们能够忽略

$$i/(\pi(r+t_y-t_x)).$$

① E. C. G. STUECKELBERG and D. RIVIER, *Helv. Phys. Acta* **23**, 215, (1950).

于是，$t_x-t_y=r>0$，所以 $t_x>t_y$. 证毕. 于是得到：

$$\int d^3x\rho_\mu(x)\int_{V_y} d^4y\frac{1}{4\pi r}\exp\left[i\omega_0(t_y+r)-\left(\frac{t_y+r}{T}\right)^2\right]$$
$$\cdot(\bar{\psi}(y)\gamma^\mu\psi(y)),$$

这描述在时刻 $t_y=-r\pm T$ 的一个过程；即根据测不准关系的要求，描述误差为 $\pm T$ 的一个"光锥上的信号".

此外，因 V_y 比 V_x 早，

$$|t_y|>T, \text{所以 } r>T,$$

并且

$$r\omega_0\gg 1.$$

这就是说，V_x 位于 V_y 的波区中，"因果性"概念只在波区中有意义.

现在，我们能够容易地指出，被忽略项 $i/(\pi(r+t_y-t_x)$变为 $\sim 1/r^2$，因此，其贡献为 δ 函数项的 $\sim 1/r\omega_0$ 倍，这是忽略这一项的第一个原因. 这种情况下是对于自由辐射场（实光子）的一个证明. 为此，我们需要束缚粒子，以保证能量和动量守恒不禁止实光子的发射.

形式上，我们还能够以稍为不同的形式将 D^C 写成：

$$D^C=-2i(D^{\text{ret}}+(D^{\text{adv}})^- -(D^{\text{ret}})^-)$$
$$=-2i(D^{\text{ret}}+\bar{D}^-),$$

第二项仍然只产生时间因子：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[+i\omega t]\exp\left[+i\omega_0 t-\frac{t^2}{T^2}\right]dt_x,$$

这是很小的. 第一项恰好是上面考虑的 δ 函数项. 于是，对于忽略 $i/(\pi(r+t_y-t_x))$，我们有第二种证明. 还可以看出，由[28.1]关系式得到，上述积分是些微的，这在前面已经用来忽略$(D^{\text{adv}})^-$，而且这是与这样的项没有波区的事实等同的.

我们仅特别考虑了摩勒散射中光子的关系式，当然，这是没有

本质意义的. 重要的是,D^C 与它的复共轭相比,具有正确的"因果性".

§29. 在均匀外电磁场中的电子自具能

由于电子与辐射场耦合,在现在的理论形式中,对于电子提供一发散的自具能(self-energy)密度,其形式为:

$$\mathscr{H}_s=\delta m\cdot\bar{\psi}(x)\psi(x).$$

由克喇末[1]首先提出, 但仅在最近几年才牢靠地实现的质量重正化思想是,人们不能用实验方法, 从机械质量m中分离 δm; 于是,人们必须认为 $m+\delta m$ 是与实验测量的电子质量等同的. 实际上,这意味着凡包含$m-\delta m$的所有各项中, δm 简单地被忽略. 原则上说, δm 是发散量不一定碍事. δm 的发散性只有一个效应, 即关于洛伦兹变换的变换特性不再是确定的了; 这就是说, 我们不能断定 δm 是否是标量, 所以, 规定忽略这些项首先是不明确的. 质量重正化手续只有包括合适的附加说明(规则化)时才变成唯一的.

这种"质量重正化"思想和类似的"电荷重正化"(见§12)一起, 加上合适的规则化规定, 足以允许对物理观察量, 由理论得出合理的结果. 这里, 我们将以 e^2 阶近似, 计算在均匀外电磁场中的自具能, 直至那些场强度的线性项. 我们将看到, 首先出现这样一个发散的、与场无关的 δm 项. 此外, 也存在一有限的、与场成正比的项, 其形式为:

$$M=\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}. \qquad [29.1]$$

其中

[1] H. A. KRAMERS, *Rapports du 8e Conseil Solvay*, 1948(R. Stoops, Brussels, 1950) p. 241.

$$\sigma_{\mu\nu}=\begin{cases}-i\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} & (\mu\neq\nu)\\ 0 & (\mu=\nu)\end{cases}$$

是自旋算符，并且

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial\mathscr{A}_{\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial\mathscr{A}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

是外场．即有

$$\mathscr{H}_{s}(x)=(\bar{\psi}(x)\delta m\psi(x))+C(\bar{\psi}(x)M\psi(x)),$$

其中

$$C=-\frac{e}{4m}\frac{e^{2}}{4\pi^{2}}. \qquad [29.2]$$

M 项表示一可观察效应，即电子的一项附加磁矩，它与玻尔磁子有些不同，其结果为：

$$\mu_{el}=\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)\mu_{B}. \qquad [29.3]$$

其中

$$\mu_{B}=\frac{e}{2m}, \qquad \text{是玻尔磁子},$$

$$\alpha=\frac{e^{2}}{4\pi}\simeq\frac{1}{137}, \qquad \text{是精细结构常数}.$$

也可以说，电子的 g 因子是：

$$g_{el}=2\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right). \qquad [29.4]$$

因此，在 $\mathscr{H}_{s}(x)$ 中，我们认真地取与场有关的项，而把无物理意义的项归咎于与场无关的项 $\delta m\bar{\psi}\psi$，因为它总是出现在 $(m+\delta m)$ 的组合中．对我们来说，这意味着正是从一开始，我们就用了不正确的质量．

注：1．戴逊证明了重正化概念对微扰论各级近似都是有效的[①]．

① F. J. DYSON. *Phys. Rev.* **75**, 1736(1949).

2. 可惜到目前为止，还不能实现不依靠微扰论的重正化概念[A-8].

这里，我们不按照许温格的原始推导，而是根据日亥钮和维拉斯①的工作. 这工作从修正的Δ函数和S函数着手，这些函数描述有外场存在时的对易关系式.（当然，由于存在电磁场，D函数不变.）

修正的函数必须满足有外场的方程，和无外场的初始条件：

$$\left.\begin{aligned}(\gamma^\mu d_\mu+m)\begin{Bmatrix}S(x,x')\\S^1(x,x')\end{Bmatrix}=0\\(\gamma^\mu d_\mu+m)\bar{S}(x,x')=-\delta^4(x-x')\end{aligned}\right\},\qquad[29.5]$$

其中，

$$d_\mu\equiv\frac{\partial}{\partial x^\mu}-ie\mathscr{A}_\mu.$$

注：函数不再是只与自变数的差值$(x-x')$有关.

由

$$S^{(\cdots)}=(\gamma^\mu d_\mu-m)\Delta^{(\cdots)},$$

得：

$$\left.\begin{aligned}(d_\mu d_\mu-m^2+eM)\Delta=0\\(d_\mu d_\mu-m^2+eM)\Delta^1=0\\(d_\mu d_\mu-m^2+eM)\bar{\Delta}=-\delta^4(x-x')\end{aligned}\right\}.\qquad[29.6]$$

在只考虑线性外场的近似中，其解可立即写作：

$$\Delta^{(\cdots)}(x,x')=\left[\Delta^{(\cdots)}(x-x')-\frac{\partial\Delta^{(\cdots)}(x-x')}{\partial m^2}eM\right]\cdot\exp[ief(x,x')],\qquad[29.7]$$

其中$f(x,x')$可以给出各种表式. 这里，我们选择势的一种特殊规范：

$$F_{\mu\nu}=\text{常数}.$$

于是我们能够选择：

---

① J. GEHENIAU and F. VILLARS. *Helv. Phys. Acta.* **23**, 179(1950).

$$\mathscr{A}_\mu(x)=-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}x^\nu. \qquad [29.8]$$

然后令 $\xi=x'-x$，而且

$$f(x,x')=-\int_x^{x+\xi}\mathscr{A}_\nu(x'')\mathrm{d}x''^\nu, \qquad [29.9]$$

其中积分是沿着直线：

$$x''=x+\lambda\xi$$

进行的．因为

$$F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu},$$

$$\left.\begin{aligned} f(x,x') &= -\xi^\nu\int_0^1\mathscr{A}_\nu(x+\lambda\xi)\mathrm{d}\lambda \\ &= +\frac{1}{2}F_{\nu\rho}\xi^\nu\int_0^1(x^\rho+\lambda\xi^\rho)\mathrm{d}\lambda \\ &= +\frac{1}{2}F_{\nu\rho}x^\rho\xi^\nu=+\frac{1}{2}F_{\nu\rho}x^\rho x'^\nu=-\frac{1}{2}F_{\nu\rho}x^\nu x'^\rho \end{aligned}\right\} \qquad [29.10]$$

注：在我们的近似中，当然能够用 $(1+ief)$ 代替 $\exp[ief]$．但是，当转换到动量空间时，采用指数形式将证明是适宜的．

于是，容易得出：

$$S^{(\cdots)}(x,x')=(\gamma^\nu d_\nu-m)\Delta^{(\cdots)}(x,x'),$$

$$\begin{aligned} S^{(\cdots)}(x,x') &= \exp[ief(x,x')]\left(\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-m\right) \\ &\quad\cdot\left[\Delta^{(\cdots)}(x-x')-\frac{\partial\Delta^{(\cdots)}(x-x')}{\partial m^2}eM\right] \\ &\quad+i\frac{e}{2}\Delta^{(\cdots)}(x-x')F_{\alpha\beta}\gamma^\alpha(x^\beta-x'^\beta). \end{aligned} \qquad [29.11]$$

下面的工作是导出自具能的普遍表式．我们采用戴逊形式．令 $\Phi_\kappa(x)$ 是量子化辐射场[和外场 $\mathscr{A}_\mu(x)$ 不同]，且令 ψ 和 $\bar{\psi}$ 是有外场存在时的电子场和正电子场．于是，根据戴逊，有

$$S^{(2)}=\frac{(-i)^2}{2}\int d^4x\int d^4x' P\{j^\mu(x)j^\nu(x')\Phi_\mu(x)\Phi_\nu(x')\}$$

$$=\frac{(-i)^2}{2}\int d^4x\int d^4x' P(j^\mu j'^\nu)P(\Phi_\mu\Phi'_\nu).$$

在上式中，我们取光子真空和电子的"单粒子项"(即取在初态和末态中粒子数平均值是 1 的那些项)，得

$$S^{(2)}_{\substack{1el\\0ph}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4x'\langle P(j^\mu j'^\nu)\rangle_{1el}D^C(x-x'),$$

$$\langle P(j^\mu j'^\nu)\rangle_{1el}=-e^2\langle P(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\cdot\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi')\rangle_{1el}.$$

在建立单粒子项时，我们必须原封不动地保留具有不同自变数的每一对 $\bar{\psi}\psi$；保留下来的具有不同自变数的对的真空期待值必须集合在一起(具有相同自变数的未集合在一起的项代表在 $j^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 表式中被忽略了的真空电流减法)，于是

$$\langle P(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\cdot\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi')\rangle_{1el}$$

$$=+\frac{1}{2}P(\bar{\psi}'\gamma^\mu\varepsilon(x'-x)S^C(x',x)\gamma^\mu\psi+(x\leftrightarrow x')).$$

如果注意到符号，则 P 可以舍去——这恰好消去 ε.（因此，被忽略的项不再是单粒子型.）于是

$$(-e^2)\langle P(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\cdot\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi')\rangle_{1el}$$

$$=+\frac{e^2}{2}P(\bar{\psi}'\gamma^\mu S^C(x',x)\gamma^\mu\psi'+(x\leftrightarrow x)).$$

所以

$$S^{(2)}_{\substack{1el\\0ph}}=-\frac{e^2}{8}\int d^4x\int d^4x'\{\bar{\psi}(x')\gamma^\mu S^C(x',x)D^C(x'-x)\gamma^\mu\psi(x)$$

$$+\bar{\psi}(x)\gamma^\mu S^C(x,x')D^C(x-x')\gamma^\mu\psi(x')\},$$

或

$$S^{(2)}_{\substack{1el\\0ph}}=-\frac{e^2}{4}\int d^4x\int d^4x'(\bar{\psi}(x')\gamma^\mu S^C(x',x)$$

$$\cdot D^C(x'-x)\gamma^\mu\psi(x)). \qquad [29.12]$$

现将 $S^{(2)}$ 分成实数部分和虚数部分，只有虚数部分是自具能型式(见下述)：

$$\left.\begin{aligned}(S^{(2)})_I=&+i\frac{e^2}{2}\int d^4x\int d^4x'(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu[S^1(x,x')\bar{D}(x-x')\\&+\bar{S}(x,x')D^1(x-x')]\gamma^\mu\psi(x')\\(S^{(2)})_R=&-\frac{e^2}{2}\int d^4x\int d^4x'(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\left[\frac{1}{2}S^1(x,x')D^1(x-x')\right.\\&-2\bar{S}(x,x')\bar{D}(x-x')]\gamma^\mu\psi(x')\end{aligned}\right\}.\quad [29.13]$$

注：1. $S_I^{(2)}$和自具能密度$\mathscr{H}_S(x)$间的关系是

$$S_I^{(2)}=-i\int\mathscr{H}_S(x)d^4x. \quad [29.14]$$

这是因为，如果$\mathscr{H}_S$是哈密顿量，那么它对 S 矩阵的贡献恰如上述．但是，$\mathscr{H}_S$ 不是由这个自变量唯一确定的．(关于这点，见下述注 3 和注 4．)

2. 实数部分，$S_R^{(2)}$：S 矩阵的幺正性要求，

$$SS^+=(1+S^{(1)}+S_I^{(2)}+S_R^{(2)})(1+S^{(1)+}+S_I^{(2)}+S_R^{(2)})=1.$$

所以

$$2S_R^{(2)}+S^{(1)}S^{(1)+}=0.$$

特别地，

$$2\langle S_R^{(2)}\rangle_{\substack{1\,el\\0\,ph}}=-\sum_{ph}\left|\left\langle\begin{matrix}1\text{ el}\\0\text{ ph}\end{matrix}\right|S^{(1)}\left|\begin{matrix}1\text{ el}\\0\text{ ph}\end{matrix}\right\rangle\right|^2.$$

对一无限时空区域积分，$S^{(1)}$的每一矩阵元必须取作零，因为，在这种近似中，不存在实过程．左边部分的初步计算也与这种情况一致．但是，为了排除收敛问题所引起的所有含糊之处，实现规则化是有用的（用重光子）见本节后述．

3. 虚数部分，$S_I^{(2)}$：可写成下列形式

$$S_I^{(2)}=-i\int\mathscr{H}_S(x)d^4x,$$

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_S(x)=&-\frac{e^2}{4}\int d^4x'\{\bar{\psi}(x')\gamma^\mu[S^{(1)}(x',x)\bar{D}(x'-x)\\&+\bar{S}(x',x)D^1(x'-x)]\cdot\gamma^\mu\psi(x)+\text{h. c.}\}.\end{aligned}$$

关于这个问题，我们在上面已经提出，这是自具能密度．但无论如何，自具能

密度是无意义的，所以，我们感兴趣的只是总能，

$$H_S=\int \mathscr{H}_S(x)\,\mathrm{d}^3x,$$

但是，由 $S_f^{(2)}$，我们得到的更加少了，即只有，

$$\int H_S\mathrm{d}t=+iS_f^{(2)}.$$

这是戴逊形式的特征，这主要对散射过程是便利的. 便利之点应该说是，在 H_S 中，时间积分为零的那些项，无论如何，不应该认为是自具能，而应该看作涨落，所以，可以把它们忽略掉. (这种涨落是振动的，$\sim\exp[2i\omega t]$，且对应于虚对偶的产生.) 此外，在上述形式中，对自由电子选择 H_S 要不包含涨落，但是，在我们所考虑的有外场存在的情况下，存在这样的涨落项，并将舍弃它们.

4. 用另外的形式(许温格)也可导出自具能，这可能是有意义的. 这种推导给出 H_S，而不是 $S^{(2)}$ 的实部. 在相互作用表象中，

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H_{\rm int}\Psi,$$

$$\mathscr{H}_{\rm int}=-j^\nu\Phi_\nu=-ie(\bar\psi\gamma^\nu\psi)\Phi_\nu.$$

我们希望用正则变换:

$$\Psi=e^S\Psi'.$$

去掉 $H_{\rm int}$. 如果选取 $i\dot S=H_{\rm int}$，则

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{2}[H_{\rm int},S]\Psi'.$$

由李氏级数容易得到:

$$e^{-S}Oe^{+}=O+[O,S]+\frac{1}{2!}[[O,S],S]+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{[[\cdots[[O,S],S],\cdots,S],S]}_{n}. \qquad [29.15]$$

证明:

$$e^{-S}Oe^{+S}=\sum_{n\,m}\frac{(-1)^n}{n!\,m!}S^nOS^m$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\binom{N}{n}S^nOS^{N-n}.$$

另一方面，用归纳法容易得出：

$$[\cdots[[O,\underbrace{S],S],\cdots,S}_{n}]=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\binom{n}{\nu}S^{\nu}OS^{n-\nu}.$$

于是，

$$e^{-S}Oe^{+S}=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}[\cdots[[O,\underbrace{S],S],\cdots,S}_{n}].\qquad\text{证毕.}$$

则当 $O=H_{\text{int}}$ 时，

$$e^{-S}H_{\text{int}}e^{+S}=H_{\text{int}}+[H_{\text{int}},S]\cdots,$$

而当 $O=\frac{\partial}{\partial t}$时，

$$e^{-S}\frac{\partial}{\partial t}e^{+S}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial S}{\partial t},\ S\right]+\cdots,$$

于是，根据 $\Psi=e^{S}\Psi'$，

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H_{\text{int}}\Psi.$$

变成

$$i\left(e^{-S}\frac{\partial}{\partial t}e^{S}\right)\Psi'=(e^{-S}H_{\text{int}}e^{S})\Psi'.$$

代入级数，即可得出结果．根据 $\dot{S}=-iH_{\text{int}}$，

得，

$$S(t)=-i\int_{-\infty}^{t}H_{\text{int}}(t')\mathrm{d}t'.$$

或，

$$S(t)=-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\varepsilon(t-t'))H_{\text{int}}(t')\mathrm{d}t'.$$

因为 H_{int} 不包含一级真实过程，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_{\text{int}}(t')\mathrm{d}t'=0,$$

于是得，

$$S(t)=-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon(t-t')H_{\text{int}}(t')\mathrm{d}t',\qquad[29.16]$$

这样，

$$\frac{1}{2}[H_{\text{int}},S]=-\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon(t-t')[H_{\text{int}}(t),H_{\text{int}}(t')]\mathrm{d}t',$$

$$\frac{1}{2}[H_{\text{int}},S]=+\frac{ie^2}{4}\int d^3x\int d^4x'\varepsilon(x-x')[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\Phi_\mu,\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi'\Phi'_\nu].$$

这里,下列辅助公式是有用的,若

$$[A,a]=[A,b]=[B,a]=[B,b]=0,$$

或若

$$\{A,a\}=\{A,b\}=\{B,a\}=\{B,b\}=0,$$

即,若 A 和 B 与 a 和 b 或者对易,或者反对易,则

$$\left.\begin{aligned}[Aa,bB]&=\frac{1}{2}[A,B]\{a,b\}+\frac{1}{2}\{A,B\}[a,b]\\\{Aa,bB\}&=\frac{1}{2}[A,B][a,b]+\frac{1}{2}\{A,B\}\{a,b\}\end{aligned}\right\}.\qquad[29.17]$$

于是,

$$\begin{aligned}&[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\Phi_\mu,\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi\Phi'_\nu]\\&\quad=\frac{1}{2}[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi,\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi']\{\Phi_\mu,\Phi'_\nu\}+\frac{1}{2}\{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi,\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi'\}[\Phi_\mu,\Phi'_\nu].\end{aligned}$$

如果我们考虑零光子项,则得:

$$\frac{1}{2}[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi,\ \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi']D^1(x-x')+\frac{i}{2}\{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi,\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi'\}D(x-x'),$$

为此,我们必须构造单电子项,利用方程[29.17],其处理方式完全类似于戴逊形式中的处理方式. 于是得:

$$\langle[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi,\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi']\rangle_{1el}=-i(\bar{\psi}\gamma^\mu S(x,x')\gamma^\mu\psi'-(x\longleftrightarrow x')),$$

$$\langle\{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi,\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi'\}\rangle_{1el}=-(\bar{\psi}\gamma^\mu S^1(x,x')\gamma^\mu\psi'+(x\longleftrightarrow x')),$$

则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\langle[H_{\text{int}},\ S]\rangle_{\substack{0ph\\1el}}\\&=+\frac{e^2}{8}\int d^3x\int d^4x'\ \varepsilon(x-x')(\bar{\psi}\gamma^\mu[S(x,x')D^1(x-x')\\&\quad+S^1(x,\ x')D(x-x')]\gamma^\mu\psi'-(x\longleftrightarrow x'))\\&=-\frac{e^2}{4}\int d^3x\int d^4x'\ \{\bar{\psi}\gamma^\mu[\bar{S}D^1+S^1\bar{D}]\gamma^\mu\psi'+(x\longleftrightarrow x')\}.\end{aligned}$$

如果注意到

$$H_S=\frac{1}{2}\langle[H_{\text{int}},\ S]\rangle_{\substack{0ph\\1el}},\qquad[29.18]$$

根据定义，我们正好得到前面用戴逊形式所得到的相同表达式.

a. 自具能的计算

在动量空间中，

$$\begin{cases}\bar{\Delta}(k)=\dfrac{1}{k^2+m^2}\\ \Delta^1(k)=2\pi\delta(k^2+m^2),\end{cases}$$

这里我们总应该取 k_0 积分的主值. 在自由情况下，下述引理是有用的:

$$\int\exp[-i(q\xi)][\bar{D}(\xi)\Delta^1(\xi)+D^1(\xi)\bar{\Delta}(\xi)]\mathrm{d}^4\xi$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int[\bar{D}(k)\Delta^1(q-k)+D^1(k)\bar{\Delta}(q-k)]\mathrm{d}^4k$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\left[\frac{\delta((q-k)^2+m^2)}{k^2}+\frac{\delta(k^2)}{(q-k)^2+m^2}\right]\mathrm{d}^4k,$$

且因 δ 函数的性质,

$$\left[\frac{\delta((q-k)^2+m^2)}{k^2}+\frac{\delta(k^2)}{(q-k)^2+m^2}\right]$$

$$=-\frac{\delta((q-k)^2+m^2)}{(q^2+m^2-2kq)}+\frac{\delta(k^2)}{(q^2+m^2-2kq)}$$

$$=-\int_0^1\delta'[k^2+v(q^2+m^2-2kq)]\mathrm{d}v.$$

所以,

$$\int\exp[-i(q\xi)][\bar{D}(\xi)\Delta^1(\xi)+D^1(\xi)\bar{\Delta}(\xi)]\mathrm{d}^4\xi$$

$$=-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\mathrm{d}^4k\int_0^1\delta'(k^2+v(q^2+m^2-2kq))\mathrm{d}v.$$

[29.19]

注意: 用此公式，对于包含实部分和虚部分的 $S^{(2)}$，我们能非常类似地做某些计算:

$$\frac{1}{2}\int\exp[-i(q\xi)]D^C(\xi)\Delta^C(\xi)\mathrm{d}^4\xi=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int D^C(k)\Delta^C(q-k)\mathrm{d}^4k$$

$$=\frac{-2}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(k^2-i\mu^2)((q-k)^2+m^2-i\mu^2)},$$

其中，由于 μ, k_0 积分也应该沿实轴.

我们能用费因曼关系式对此进行变换，费因曼关系式在方程[11.2]中已被使用，

$$\frac{1}{ab}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{[b+(a-b)v]^2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{[a+(b-a)v]^2},$$

所以，

$$\frac{1}{2}\int\exp[-i(q\xi)]D^C(\xi)\Delta^C(\xi)\mathrm{d}^4\xi$$

$$=\frac{-2}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k\int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{[k^2+i\mu^2+v(q^2+m^2-2kq)]^2}. \qquad [29.20]$$

用同样方法，我们能计算自由情况下的 $S^{(2)}$，根据

$$\psi(x)=\int u(q)\exp[-i(qx)]\mathrm{d}^4q$$

和 $\xi=x'-x$，我们有(见方程[29.13])

$$S^{(2)}=-\frac{e^2}{2}\int\bar{u}(q)\exp[-i(qx)]F(q)\psi(x)\mathrm{d}^4q. \qquad [29.21]$$

其中

$$F(q)=\frac{1}{2}\int\exp[-i(q\xi)]\gamma^\mu S^C(\xi)\gamma^\mu D^C(\xi)\mathrm{d}^4\xi$$

$$=\frac{-2}{(2\pi)^4}\int\frac{\gamma^\mu[i\gamma(q-k)-m]\gamma^\mu}{(k^2-i\mu^2)((q-k)^2+m^2-i\mu^2)}\mathrm{d}^4k.$$

根据

$$\gamma^\mu[i\gamma(q-k)-m]\gamma^\mu=-2i\gamma(q-k)-4m$$

和方程[11.2]，我们得到结果为:

$$F(q)=\frac{-2}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k\int_0^1\frac{-2i\gamma(q-k)-4m}{[k^2-i\mu^2+v(q^2+m^2-2kq)]^2}\mathrm{d}v. \qquad [29.22]$$

注: 因为 k 积分发散，这些公式暂时只是有条件地正确. 然而，进行适当的规则化，k 积分变成收敛.

"规则化"[①]是处理发散积分而保持洛伦兹不变性的一种形式方法. 在采用这种方法的最简单的情况中,除了实光子,还必须用一虚耦合常数 ie 去耦合大质量 M 的光子. 即产生下列变换:

$$\frac{1}{k^2-i\mu^2}\to\frac{1}{k^2-i\mu^2}-\frac{1}{k^2+M^2-i\mu^2},$$

而且,在方程[29.22]的被积函数中,

$$\frac{1}{[\cdots]^2}\to\left(\frac{1}{[k^2-i\mu^2+v(q^2-m^2-2kq)]^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{[k^2+M^2-i\mu^2+v(q^2+m^2-2kq-M^2)]^2}\right).$$

因而,积分变成:

$$\frac{-2}{(2\pi)^4}\int d^4k\int_0^1\left(\frac{-2i\gamma(q-k)-4m}{[k^2-i\mu^2+v(q^2+m^2-2kq)]^2}\right.$$

$$\left.-\frac{-2i\gamma(q+k)-4m}{[k^2+M^2-i\mu^2+v(q^2+m^2-2kq-M^2)]^2}\right)dv,$$

这是收敛的. 我们能够在复数平面中, 用上半平面的闭合路线计算这收敛积分. 沿半圆的积分贡献为零, 而留数的和产生一虚贡献, 这与上面得到的许温格表达式完全一致. 对于以前所说的: 规则化之后, $S^{(2)}$的实部为零, 这是一个证明.

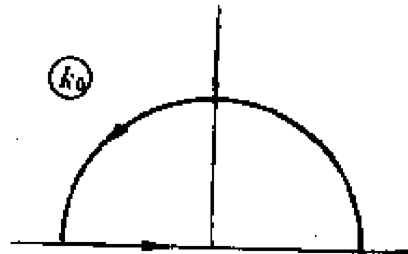


图 29.1

现在, 回到维拉斯和日亥钮的计算. 因为

$$\lambda\equiv(x^\alpha-x'^\alpha)(x^\alpha-x'^\alpha),$$

我们有(方程[29.11],[29.9]):

$$\bar{S}(x,x')=\exp\left[ie\int_{x'}^{x}\mathscr{A}''_\nu dx''^\nu\right]\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}-m\right)\left[\bar{\Delta}(\lambda)\right.$$

---

① R. P. FEYNMAN, *Phys. Rev.* 76, 769(1949); W. PAULI and F. VILLARS, *Rev. Mod. Phys.* 21, 434(1949).

$$-\frac{\partial\bar{\Delta}(\lambda)}{\partial m^2}eM\Bigg]+\frac{ie}{2}\bar{\Delta}(\lambda)F_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}(x^{\beta}-x'^{\beta}),$$

且对 S^1 有一类似表达式. 指数中的积分得沿直线. 于是,

$$\mathscr{H}_s(x)=-\frac{e^2}{4}\int d^4\xi\{\bar{\psi}(x+\xi)\gamma^{\mu}[\bar{D}(\lambda)S^1(x+\xi,x)$$

$$+D^1(\lambda)\bar{S}(x+\xi,x)]\gamma^{\mu}\psi(x)+\text{h. c.}\}.$$

注: 因为外场无源, 不会出现真空极化.

以这表达式代替 S^1 和 S, 我们得到,

$$\mathscr{H}_s(x)=I+II+III$$

这里,

$$I=-\frac{e^2}{4}\int d^4\xi\Big\{\bar{\psi}(x+\xi)\gamma^{\mu}[\bar{D}(\lambda)\Gamma(\xi)\Delta^1(\lambda)$$

$$+D^1(\lambda)\Gamma(\xi)\bar{\Delta}(\lambda)]\gamma^{\mu}\psi(x)\cdot\exp\Big[ie\int_{x'}^{x}\mathscr{A}_{\nu}''dx''\Big]$$

$$+\text{h. c.}\Big\},\qquad [29.23]$$

其中

$$\Gamma(\xi)\equiv\Big(\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}}-m\Big);\qquad [29.24]$$

$$II=+\frac{e^3}{4}\int d^4\xi\Big\{\bar{\psi}(x+\xi)\gamma^{\mu}\Big[\bar{D}(\lambda)\Gamma(\xi)\frac{\partial\Delta^1}{\partial m^2}$$

$$+D^1(\lambda)\Gamma(\xi)\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial m^2}\Big]\cdot M\gamma^{\mu}\psi(x)+\text{h. c.}\Big\};\qquad [29.25]$$

和

$$III=+\frac{ie^3}{8}F_{\mu\nu}\int d^4\xi\{\bar{\psi}(x+\xi)\gamma^{\sigma}[\tilde{D}(\lambda)\Delta^1(\lambda)$$

$$+D^1(\lambda)\bar{\Delta}(\lambda)]\cdot\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\xi^{\nu}\psi(x)+\text{h. c.}\}\qquad [29.26]$$

注: 这里, 除了在 I 的指数中, 我们忽略了次数高于 e^4 的项. 在 I 的指数中, 实际证明必须保留它们.

b. 计算 I

我们将这项部分地在动量空间中写出, 而剩下的部分 $\psi(x)$ 原样不动:

$$I=\frac{e^2}{2\cdot(2\pi)^4}\int d^4q\bar{u}(q)\exp[-i(qx)]\int d^4k\{[\tilde{D}(k)\Delta^1(k-\bar{q})$$

$$+D^1(k)\bar{\Delta}(k-\tilde{q})]\cdot\gamma^\sigma[+i\gamma(k-\tilde{q})+m]\gamma^\sigma\psi(x)+\text{c. c.}\},$$

其中 c. c. 表示电荷共轭表达式. 这里,

$$\tilde{q}=q-e\mathscr{A}(x).$$

如果

$$d_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}+ie\mathscr{A}_\mu(x),$$

则

$$-d_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu+m\bar{\psi}=0.$$

即

$$\int\exp[-i(qx)]\bar{u}(q)(i\gamma\tilde{q}+m)\mathrm{d}^4q=0.$$

现在,我们能够利用引理[29. 19],并引入参量 v, 于是 δ' 是

$$\delta'[k^2+v(\tilde{q}^2+m^2-2k\tilde{q})].$$

现作积分变量变换如下:

$$k'=k-v\tilde{q}, \qquad [29.27]$$

所以得

$$\delta'(k'^2+v^2m^2+\varepsilon).$$

其中

$$\varepsilon=(v-v^2)(\tilde{q}^2+m^2),$$

注: 这种变换型式(方程 [29. 27] 所描述的)只对充分收敛的积分(也就是那些较对数型发散为小的)才是允许的,因而,不是真正允许的. 然而,因为与场有关的项收敛,正如我们会看到的那样,在这种情况下,这是适当的;相反,实际的与场无关的自具能,只有经过规则化,才能以洛伦兹不变式的方式定义.

此外,

$$\gamma^\sigma[+i\gamma(k-\tilde{q})+m]\gamma^\sigma=-2i\gamma(k-\tilde{q})+4m$$
$$=-2i\gamma(k'-\tilde{q}(1-v))+4m.$$

根据对称性论据, k' 的线性项不作贡献. 所以,最后得:

$$I=-\frac{e^2}{2\cdot(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^4k\int_0^1\mathrm{d}v\int\mathrm{d}^4q\left\{\overline{u}(q)\exp[-i(qx)]\right.$$
$$\left.\delta'(k^2+m^2v^2+\varepsilon)\cdot[-i\gamma\tilde{q}(v-1)+2m]\psi(x)+\mathrm{h.c.}\right\}.$$
[29.28]

考虑贡献为 e^2 的部分(不包括外场):

$$\tilde{q}\to q,\quad q^2+m^2=0;\text{因此}\quad \varepsilon=0,\ i\gamma q=-m,$$

所以

$$I^0=-\frac{e^2}{2\cdot(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^4k\int_0^1\mathrm{d}v\int\mathrm{d}^4q$$
$$\cdot\overline{u}(q)\exp[-i(qx)]\delta'(k^2+m^2v^2)m(v+1)\psi(x).$$

积分

$$I^0\equiv\int\overline{u}(q)\exp[-i(qx)]I_q^0\cdot\psi(x)\mathrm{d}^4q$$

给出电子的发散自具能，正如已经提到的，只有通过规则化，才能够严格地定义.

我们有

$$\int\delta'(-k_0^2+A)\mathrm{d}k_0=\int_0^\infty\delta'(-z+A)\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}=-\frac{1}{2}A^{-\frac{3}{2}},$$

所以

$$\int\delta'(k^2+m^2v^2)\mathrm{d}^4k$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(k^2+m^2v^2)^{\frac{3}{2}}}=-2\pi\int_0^\infty\frac{k^2}{(k^2+m^2v^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}k.$$

形式上，因 $k=mvz$，上述积分变为

$$-2\pi\int_0^\infty\frac{z^2}{(z^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}z,$$

这是对数型发散量. 于是，

$$I_q^0=\frac{e^2}{2\cdot(2\pi)^2}\cdot\frac{3}{2}m\int_0^\infty\frac{z^2}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}z. \qquad [29.29]$$

当然，这是不确定的.

考虑贡献为 e^3 的部分(外场中的线性项)，我们写 $I=I^0+I^1+\mathrm{c.c.}$，则其中 I^1 贡献为 e^3. 我们必须按 e 的幂展开到线性项：

$$I^1=-\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int\bar{u}(q)\exp[-i(qx)]I_q^1\cdot\psi(x)\mathrm{d}^4q,$$

其中

$$I_q^1=\int_0^1\mathrm{d}v\int\mathrm{d}^4k\delta''(k^2+m^2v^2)[i\gamma\tilde{q}(1-v)+2m]$$
$$v(1-v)(\tilde{q}^2+m^2).$$

因为

$$\int\delta''(-k_0^2+A)\mathrm{d}k_0=\int_0^\infty\delta''(z+A)\ \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}=+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}A^{-\frac{5}{2}},$$

所以

$$\int\delta''(k^2+m^2v^2)\mathrm{d}^4k=\frac{3}{4}\cdot4\pi\int_0^\infty\frac{k^2\,\mathrm{d}k}{(k^2+m^2v^2)^{\frac{5}{2}}}$$
$$=3\pi\frac{1}{3v^2m^2}=\frac{\pi}{v^2m^2},$$

因为

$$\int_0^\infty\frac{k^2}{(k^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}k=\frac{1}{3}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}k}{(k^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3a^2},$$

于是

$$I_q^1=\frac{\pi}{m^2}\int_0^1[i\gamma\tilde{q}(1-v)+2m]\ \frac{1-v}{v}(\tilde{q}^2+m^2)\mathrm{d}v. \qquad [29.30]$$

注：被积函数在 $v=0$ 处有一奇点，它将与其它项抵消.

现在，我们进一步将 I_q^1 分解：

$$I_q^1=I_q^{1\prime}+I_q^{1\prime\prime}, \qquad [29.31]$$

其中

$$I_q^{1\,\prime}=-\frac{e^2}{4\cdot(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{m}(\tilde{q}^2+m^2)\int_0^1\frac{1-v^2}{v}\mathrm{d}v,$$

$$I_q^{1\,\prime\prime}=-\frac{e^2}{4(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{m^2}(i\gamma\tilde{q}+m)(\tilde{q}^2+m^2)\int_0^1\frac{(1-v)^2}{v}\mathrm{d}v.$$

因为狄拉克方程，所以

$$\int\bar{u}(q)\exp[-i(qx)](\tilde{q}^2+m^2-eM)\mathrm{d}^4q=0.$$

于是，在 $I_q^{1\,\prime}$ 中，我们可作如下代换：

$$\tilde{q}^2+m^2=eM,$$

得

$$I_q^{1\,\prime}=-\frac{e}{4m}\frac{e^2}{4\pi^2}M\int_0^1\frac{1-v^2}{v}\mathrm{d}v.$$

则

$$(I_q^{1\,\prime}+\mathrm{c.\,c.})=-\frac{e}{2m}\cdot\frac{e^2}{4\pi^2}(\bar{\psi}M\psi)\int_0^1(1-v^2)\frac{\mathrm{d}v}{v}.$$

[29.32]

$I_q^{1\,\prime\prime}$ 项不是自具能型；而是描述一种涨落.

由

$$\int\bar{u}(q)(i\gamma\tilde{q}+m)\exp[-iqx]\mathrm{d}^4q=0,$$

应用

$$(-d_\mu d_\nu+m^2)$$

后得，

$$0=\int\exp[-i(qx)]\bar{u}(q)[(\tilde{q}^2+m^2)(i\gamma\tilde{q}+m)$$
$$-eF_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\tilde{q}_\beta]\mathrm{d}^4q.$$

（注意，包含在 $\tilde{q}$ 中的 $\mathscr{A}(x)$ 也必须微分.）由此，

$$I_q^{1\,\prime\prime}=-\frac{e}{4m^2}\frac{e^2}{4\pi^2}F_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\tilde{q}_\beta\int_0^1\frac{(1-v)^2}{v}\mathrm{d}v.$$

以后，我们会发现更多这样的项，并将指出，它们对应于一种**涨落**。

c. 计算 II.

我们有

$$II=\frac{e^3}{4}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int d^4k\int d^4q\left\{\bar{u}(q)\exp[-i(qx)]\right.$$

$$\cdot\left[\bar{D}(k)\frac{\partial\Delta^1(k-q)}{\partial m^2}+D^1(k)\frac{\partial\bar{\Delta}(k-q)}{\partial m^2}\right]$$

$$\left.\cdot\gamma^\alpha[i\gamma(q-k)-m]M\gamma^\alpha\psi(x)+\text{h. c.}\right\}. \qquad [29.33]$$

这里，因为 e^3，我们总能用自由狄拉克方程计算．我们有，

$$M\gamma^\alpha=\gamma^\alpha M+2iF_{\alpha\beta}\gamma^\beta,$$

$$\gamma^\alpha(i\gamma p-m)\gamma^\alpha=-2(i\gamma p+2m),$$

$$-2iF_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta=4M,$$

所以

$$\gamma^\alpha[i\gamma(q-k)-m]M\gamma^\alpha=-2[i\gamma(q-k)+2m]M$$

$$+4mM+4i\gamma(q-k)M+2F_{\alpha\beta}(q_\alpha-k_\alpha)\gamma^\beta.$$

此外，我们可以写

$$\int\bar{u}(q)i(\gamma q)\exp[-i(qx)]d^4q=-\int\bar{u}(q)\cdot m\exp$$

$$[-i(qx)]d^4q,$$

所以

$$\int d^4q\exp[-iqx]\bar{u}(q)\gamma^\alpha[i\gamma(q-k)-m]M\gamma^\alpha\psi(x)+\text{c. c.}$$

$$=-\int d^4q\bar{u}(q)\exp[-iqx]\{2[i\gamma k+m]M$$

$$+4F_{\alpha\beta}(q_\beta-k_\beta)\gamma^\alpha\}\psi(x)+\text{c. c.}.$$

令

$$II=IIa+IIb,$$

其中

$$IIa\equiv-\int d^4q\bar{u}(q)\exp[-iqx]\cdot 2[i\gamma k+m]M\psi(x)+\text{c. c.},$$

$$IIb\equiv-\int d^4q\bar{u}(q)\exp[-iqx]\cdot 4F_{\alpha\beta}(q_\beta-k_\beta)\gamma^\alpha\psi(x)+\text{c.c.}$$

第一项 IIa 对磁矩作出另一种贡献;第二项贡献为涨落．而且,

$$\bar{D}(k)\frac{\partial\Delta^1(q-k)}{\partial m^2}+D^1(k)\frac{\partial\bar{\Delta}(q-k)}{\partial m^2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial m^2}[\bar{D}(k)\Delta^1(q-k)+D^1(k)\bar{\Delta}(q-k)]|_{q=\text{常数}}$$

$$=-2\pi\int_0^1 v\cdot\delta''[k^2+v(q^2+m^2-2kq)]dv.$$

现在，我们可以令 $q^2+m^2=0$, 并进行变换，$k'=k-vq$．然后再将 k' 写作 k，并因对称性缘故而忽略积分中 k 的线性项．于是,

$$IIa=+\frac{e^3}{2\cdot(2\pi)^3}\int d^4k\int d^4q\exp[-iqx]\bar{u}(q)\int_0^1 v\cdot\delta''(k^2+v^2m^2)\cdot(i\gamma qv+m)M\psi(x)dv+\text{c. c.}$$

用 $-m$ 代替 $i\gamma q$, 得,

$$IIa=+\frac{e}{4m}\ \frac{e^2}{4\pi^2}\cdot 2\bar{\psi}M\psi\int_0^1(1-v)\frac{dv}{v}. \qquad [29.34]$$

因为 $I^{1''}$、IIb 和 III 是涨落，我们已经能够写下主要结果:

$$I^{1'}+IIa=\frac{e}{4m}\cdot\frac{e^2}{4\pi^2}\cdot 2\bar{\psi}M\psi\int_0^1[(1-v)-(1-v^2)]\frac{dv}{v}$$

$$=-\frac{e}{2m}\cdot\frac{e^2}{4\pi^2}\cdot\bar{\psi}M\psi\int_0^1(v-v^2)\frac{dv}{v}.$$

奇点正好消失．我们有

$$I^{1'}+IIa=-\frac{e}{4m}\cdot\frac{\alpha}{\pi}\cdot\bar{\psi}M\psi, \qquad [29.35]$$

其中 $\alpha=e^2/4\pi\simeq 137$．这是对[29.3]式给出的磁矩的修正．

除了涨落项尚未讨论外，还剩下 III 项，我们将看到，III 也是

这种形式. 我们将未曾讨论的项收集在一起:

$$I^{1''} + \text{c. c.} = -\frac{e}{4m} \cdot \frac{e^2}{4\pi^2} F_{\alpha\beta} \int \mathrm{d}^4 q \exp[-iqx] \bar{u}(q) \gamma^\alpha q_\beta$$

$$\cdot \int_0^1 \frac{(1-v)^2}{v} \psi(x) \mathrm{d}v + \text{c. c.} \quad . \qquad [29.36]$$

$$IIb = +\frac{e^3}{(2\pi)^3} F_{\alpha\beta} \int \mathrm{d}^4 k \int \mathrm{d}^4 q \bar{u}(q) \exp[-iqx]$$

$$\cdot \int_0^1 \delta'' [k^2 + v(q^2 + m^2 - 2kq)] \cdot (q_\beta - k_\beta) \gamma^\alpha \psi(x) v \mathrm{d}v + \text{c. c.} ,$$

$$[29.37]$$

这里, 我们实行通常的变换 $k = k' + vq$, 令 $q^2 + m^2 = 0$, 并舍去 k' 的线性项, 于是,

$$IIb = \frac{e^3}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{2m^2} F_{\alpha\beta} \int \mathrm{d}^4 q \exp[-iqx] \bar{u}(q) \gamma^\alpha q_\beta$$

$$\int_0^1 \frac{1-v}{v} \psi(x) \mathrm{d}v + \text{c. c.} \qquad [29.38]$$

还有方程[29.26],

$$III = i\frac{e^3}{8} F_{\mu\nu} \int \mathrm{d}^4 q \exp[-iqx] \bar{u}(q) \gamma^\alpha \int \mathrm{d}^4 \xi \exp[-iq\xi]$$

$$\cdot [\bar{D}(\lambda) \Delta^1(\lambda) + D^1(\lambda) \bar{\Delta}(\lambda)] \gamma^\mu \gamma^\alpha \xi^\nu \psi(x) + \text{c. c.}$$

因为 $\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\alpha = -2\gamma^\mu$, 及引理[29.19], 有

$$\int \exp[-iq\xi][\bar{D}(\lambda) \Delta^1(\lambda) + D^1(\lambda) \bar{\Delta}(\lambda)] \mathrm{d}^4 \xi$$

$$= -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \mathrm{d}^4 k \int_0^1 \delta'(k^2 + v(q^2 + m^2 - 2kq)) \mathrm{d}v,$$

对 q_ν 微分, 得,

$$\int \exp[-iq\xi] \xi^\nu [\bar{D}(\lambda) \Delta^1(\lambda) + D^1(\lambda) \bar{\Delta}(\lambda)] \mathrm{d}^4 \xi$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 i \frac{\partial}{\partial q_\nu} \int \mathrm{d}^4 k \int_0^1 \delta'(k^2 + v(q^2 + m^2 - 2kq)) \mathrm{d}v$$

$$=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\cdot 2(q_\nu-k_\nu)\int_0^1\delta''(k^2+v(q^2+m^2-2kq))v\mathrm{d}v.$$

于是

$$III=-\frac{1}{2}\frac{e^3}{(2\pi)^3}F_{\mu\nu}\int d^4q\exp[-iqx]\bar{u}(q)\int d^4k(q_\nu-k_\nu)$$

$$\cdot\int_0^1\delta''(k^2+v(q^2+m^2-2kq))\psi(x)v\mathrm{d}v+\text{c. c.}\cdot. \quad [29.39]$$

$$III=-\frac{1}{2}IIb,$$

所以

$$III+IIb=+\frac{1}{2}IIb=+\frac{e}{4m^2}\frac{e^2}{(2\pi)^2}F_{\alpha\beta}$$

$$\cdot\int d^4q\exp[-iqx]\bar{u}(q)\gamma^\alpha q_\beta\int_0^1\psi(x)\frac{1-v}{v}\mathrm{d}v+\text{c. c.}$$

因为

$$I^{1''}=-\frac{e}{4m^2}\frac{e^2}{(2\pi)^2}F_{\alpha\beta}\int d^4q\exp[-iqx]\bar{u}(q)\gamma^\alpha q_\beta$$

$$\cdot\int_0^1\psi(x)\frac{(1-v)^2}{v}\mathrm{d}v+\text{c. c.},$$

我们定义:

$$Z=I^{1''}+IIb+III=\frac{e^2}{4\pi^2}\cdot\frac{e}{4m^2}F_{\alpha\beta}\int d^4q\bar{u}(q)$$

$$\cdot\exp[-iqx]\gamma^\alpha q^\beta\cdot\int_0^1\psi(x)[1-(1-v)]\frac{1-v}{v}\mathrm{d}v+\text{c. c.},$$

$$Z=\frac{e^2}{4\pi^2}\cdot\frac{e}{4m^2}\cdot\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\int d^4q\bar{u}(q)\exp[-iqx]\gamma^\alpha q_\beta\psi(x)+\text{c. c.}$$

$$=\frac{e^2}{4\pi^2}\cdot\frac{e}{8m^2}F_{\alpha\beta}\left\{i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\beta}\gamma^\alpha\psi(x)+\text{c. c.}\right\}.$$

因为

$$ie\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi\equiv j^\alpha,$$

则

$$\text{c.c.}\,(i\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\psi)=+i\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\psi.$$

因此

$$Z=\frac{e^2}{4\pi^2}\ \frac{e}{8m^2}iF_{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^{\beta}}\gamma^{\alpha}\psi(x)+\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\beta}}\right\}$$

$$=\frac{e^2}{4\pi^2}\cdot\frac{e}{8m^2}\cdot F_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(i\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\psi)$$

$$=\frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{8m^2}F_{\alpha\beta}\frac{\partial j^{\alpha}}{\partial x^{\beta}},$$

$$Z=\frac{\alpha}{\pi}\ \frac{1}{8m^2}\ \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(F_{\alpha\beta}j^{\alpha}).$$

因为 $F_{\alpha\beta}$ 是常数，也可写成另一种形式：

$$Z=\frac{\alpha}{\pi}\ \frac{1}{16m^2}F_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial j^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial j^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right).\qquad [29.40]$$

确实，当只对空间积分时，这样的项不为零，而得到一形式为 $\boldsymbol{E}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{J}/\mathrm{d}t)$ 的结果.

但是，这表达式的时间积分为零．于是，这些项只有对应一种涨落的矩阵元，而且如已指出的那样，它们对自具能无贡献.

最后的注：维拉斯-日亥钮方法对于计算反常磁矩的好处，主要在于不出现电荷重正化项．在物理学上必须是这样的，因为场源在无限远．相反，许温格方法得出许多这样的电荷重正化项，而最后，这些项相消.

第七章　量子电动力学的费因曼方法[1]

§30. 路线积分法

费因曼方法从避免哈密顿函数的量子力学公式化着手．这种方法起源于狄拉克的一个评论[2]，而费因曼发展了这种方法[3]．也可参看乔夸德的文章[4]．

我们从 n 个自由度的薛定谔方程的一个特解开始，

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\underline{H}\psi=0 \qquad [30.1]$$

$\psi(q,t)$的形式为：

$$\psi(q,t)=K(q,t;q',t'), \qquad [30.2]$$

当 $t=t'$ 时，K 简化为 n 维 δ 函数：

$$K(q,t;q',t)=\delta^{(n)}(q-q') \qquad [30.3]$$

于是，K 给出了任一初态 $\psi(q',t')$ 的解：

$$\psi(q,t)=\int K(q,t;q',t')\psi(q',t')\mathrm{d}^nq'. \qquad [30.4]$$

在时间 τ 内，系统由状态 ψ_n 到 ψ_m 的几率幅由下述矩阵元给出：

---

① R. P. FEYNMAN. *Phys. Rev.* **76**, 769(1949); **80**, 440(1950).

② P. A. M. DIRAC. *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford University Press, Oxford, 1947) 3rd ed., Sect. 32, p. 125, "The action principle."中译本《量子力学原理》狄拉克著，陈咸亨译(科学出版社, 1965) §32，作用量原理，p. 127.

③ R. P. FEYNMAN. *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367(1948).

④ PH. CHOQUARD. *Helv. Phys. Acta*, **28**, 89(1955).

$$K_{mn} \equiv \int d^n q \int d^n q' \psi_m^*(q, t+\tau) K(q, t+\tau; q', t) \psi_n(q', t).$$

为简化起见，下面我们假定$\underline{H}$不明显依赖于时间；于是，K 只包含时间差 $\tau = t - t'$:

$$K(q, t; q', t') = K(q, \tau; q', 0). \qquad [30.5]$$

但是，这个限制不是本质的.

K 的性质:

1. $$\int K(q, q'; \tau) K^*(q, q''; \tau) d^n q = \delta^{(n)}(q' - q''). \qquad [30.6]$$

这是正确的，因为，根据连续性方程得出积分是与时间无关的. 但是，当 $\tau = 0$ 时，它等于上述方程的右侧.

2. $$K^*(q', q; \tau) = K(q, q'; -\tau). \qquad [30.7]$$

这由$\underline{H}$的厄密性立即得出.

3. K 有群的性质:

$$\int K(q, q'; \tau_1) K(q', q''; \tau_2) d^n q' = K(q, q''; \tau_1 + \tau_2), \qquad [30.8]$$

因为(a) 两边都满足薛定谔方程(关于 q)，(b)由性质 1 和性质 2 得出，初始条件[30.3]是满足的.

费因曼企图给出一个省略薛定谔方程 [30.1] 的新的量子力学基础，

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial K}{\partial t} + \underline{H} K = 0 \quad (\text{注意: } \underline{H} \text{ 算符只作用于 } q),$$

而代之以公理地引入 K. 此外，方程[30.4]必须成立.

如大家所熟知的，薛定谔方程允许按对应原理由一古典问题 ($H(p, q)$) 变换到相关的量子力学问题($\underline{H}(\underline{p}, \underline{q})$)，除了因子的次序含糊不定外. 这里，可以进行某些类似的变换. 当 τ 小时，我们能够求得一个解 $K(q, q'; \tau)$. 我们定义:

$$K_C(q, q'; \tau) = (2\pi i \hbar)^{-n/2} \sqrt{D} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(q, q'; \tau)\right]. \qquad [30.9]$$

这里，$S(q,q';\tau)$是古典作用量积分：

$$S(q,q';\tau)=\int_t^{t+\tau}Ldt', \qquad [30.10]$$

其中积分是沿古典路线由 q' 到q. 如果 $H(p,q)$ 明显地与时间有关，我们必须写作：

$$S(q,t+\tau;q',t)=\int_t^{t+\tau}Ldt'. \qquad [30.11]$$

而且，

$$D=(-1)^n\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial q'^k}\right\|, \qquad [30.12]$$

其中‖ ‖表示行列式. 按照古典力学，

$$p_k=\frac{\partial S}{\partial q^k}, \qquad p'_k=-\frac{\partial S}{\partial q'^k}, \qquad [30.13]$$

且哈密顿-雅科毕方程成立：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial\tau}+H\left(\frac{\partial S}{\partial q},q\right)=0\\ \frac{\partial S}{\partial\tau}+H\left(-\frac{\partial S}{\partial q'},q'\right)=0\end{aligned}\right\}. \qquad [30.14]$$

现在我们来导出关于 K_C 的微分方程式. 一般情况下，这不会是薛定谔方程式——确实，不应该期望得到薛定谔方程式，因为否则，由于 K_C 确实是纯粹由古典量所构成的，波动力学将几乎是多余的. 但是，当 τ 小时，这微分方程转变为薛定谔方程. 对 $\tau=0$, K_C 之转变为 δ 函数是更为重要的，因而，将举例说明.

我们将限于讨论包含磁场的一种"正常"拉格朗日函数，并用笛卡儿坐标写作：

$$\left.\begin{aligned}L=\sum_k\frac{m_k}{2}((\dot q^k)^2-\dot q^kA_k(q))-V(q)\\ H=\sum_k\frac{1}{2m_k}(p_k+A_k(q))^2+V(q)\end{aligned}\right\}. \qquad [30.15]$$

(关于曲线坐标,可按完全相同的方法进行.)于是,

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}+\sum_k \frac{1}{2m_k}\left(\frac{\partial S}{\partial q^k}+A_k(q)\right)^2+V(q)=0. \qquad [30.16]$$

现在我们需要 $\partial D/\partial \tau$, 因而需要

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q'^k}\right).$$

方程式[30.16]意味着

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\ \frac{\partial S}{\partial q'^i}+\sum_k \frac{1}{m_k}\left(\frac{\partial S}{\partial q^k}+A_k\right)\frac{\partial^2 S}{\partial q^k \partial q'^i}=0.$$

对上式取 $\partial/\partial q^j$, 得,

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\ \frac{\partial^2 S}{\partial q'^i \partial q^j}+\sum_k \frac{1}{m_k}\ \frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{\partial S}{\partial q^k}+A_k\right)\frac{\partial^2 S}{\partial q'^i \partial q^k}$$
$$+\sum_k \frac{1}{m_k}\left(\frac{\partial S}{\partial q^k}+A_k\right)\frac{\partial^3 S}{\partial q^i \partial q'^i \partial q^k}=0.$$

[30.17]

令

$$\varphi_{ji}=\frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial q'^i}, \qquad (\varphi_{ji}\neq\varphi_{ij}),$$

且按下式定义 φ^{ji},

$$\sum_\alpha \varphi^{j\alpha}\varphi_{\alpha i}=\delta^j_i=\sum_\alpha \varphi^{\alpha j}\varphi_{i\alpha}.$$

于是,

$$\frac{\partial D}{\partial \tau}=D\cdot\varphi^{ji}\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \tau}$$

和

$$\frac{\partial D}{\partial q^k}=D\cdot\varphi^{ji}\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial q^k},$$

这里使用了习惯的求和法. 以 φ^{ji} 乘方程 [30.17], 利用上两式化简后得:

$$\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \tau}+\sum_k \frac{1}{m_k}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{\partial S}{\partial q^k}+A_k\right)$$
$$+\sum_k \frac{1}{m_k}\left(\frac{\partial S}{\partial q^k}+A_k\right)\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial q^k}=0. \qquad [30.18]$$

现在我们建立

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial K_C}{\partial \tau}+\left(\sum_k \frac{1}{2m_k}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q^k}+A_k\right)^2+V(q)\right)K_C. \qquad [30.19]$$

我们有

$$\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q^k}+A_k\right)K_C=\left(\frac{\partial S}{\partial q^k}+A_k+\frac{\hbar}{i}\frac{1}{2D}\frac{\partial D}{\partial q^k}\right)K_C,$$
$$\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q^k}+A_k\right)^2 K_C=\left(\frac{\partial S}{\partial q^k}+A_k+\frac{\hbar}{i}\frac{1}{2D}\frac{\partial D}{\partial q^k}\right)^2 K_C$$
$$+\frac{\hbar}{i}\left[\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{\partial S}{\partial q^k}+A_k+\frac{\hbar}{i}\frac{1}{2D}\frac{\partial D}{\partial q^k}\right)\right]\cdot K_C,$$
$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial K_C}{\partial \tau}=\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}+\frac{1}{2}\frac{\hbar}{i}\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \tau}\right)K_C.$$

我们按 $\hbar$ 的幂进行排列并相加，则因哈密顿-雅科毕方程[30.16]，$\hbar$ 的零次项为零，$\hbar$ 的一次项为：

$$\frac{\hbar}{2i}\left[\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \tau}+\sum_k \frac{1}{m_k}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{\partial S}{\partial q^k}+A_k\right)\right.$$
$$\left.+\sum_k \frac{1}{m_k}\left(\frac{\partial S}{\partial q^k}+A_k\right)\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial q^k}\right]=0. \qquad [30.20]$$

剩下的只是 $\hbar^2$ 项（“虚假项”）：

$$-\hbar^2\left(\sum_k \frac{1}{2m_k}\left[\left(\frac{1}{2D}\frac{\partial D}{\partial q^k}\right)^2+\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{1}{2D}\frac{\partial D}{\partial q^k}\right)\right]\right)\cdot K_C.$$

如果将这些项结合在一起，则得：

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial K_C}{\partial \tau}+\underline{H}K_C=-\hbar^2\left(\sum_k \frac{1}{2m_k}\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{\partial^2\sqrt{D}}{\partial (q^k)^2}\right)\cdot K_C$$

注：若D与q无关，则$K_C=K$已经是正确的解。

现在我们要证明，在一般情况下，虽然K_C不是所要求的K，但当τ**小时**，K_C却正好具有K的性质。更明确地说，我们要证明：

1. $K_C(q, q'; 0)=\delta^{(n)}(q-q')$，

2. $\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{K-K_C}{\tau}=0$.

如果这些断言得到满足，那么，利用群的性质[30.8]，我们可以通过极限过程由K_C得到真正的K：

$$K(q, q'; \tau)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty\\ \tau\text{固定}}}\int\prod_{\alpha=0}^{N-1}K_C(q^{(\alpha+1)}, q^{(\alpha)}; \varepsilon)\mathrm{d}q^1\cdots\mathrm{d}q^\alpha\cdots\mathrm{d}q^{N-1},$$

[30.21]

其中我们将τ分成大小为ε的N个间隔：

$$\tau=N\varepsilon,\quad 和\quad q'=q^0,\quad q=q^N.$$

且K_C由[30.9]给出。方程[30.21]可以解释为沿所有古典路线的积分①。因为$\lim\limits_{\tau\to 0}(K-K_C)/\tau=0$，在方程[30.21]中，$K$的结果不会产生非无限小的误差，所以，事实上这是正确的K。

我们还必须证明断言1和2．为此，考虑一些例子。

a．自由落体：

$$L=\frac{m}{2}\dot{q}^2+mgq,$$

$$K_C(q, q'; \tau)=K(q, q'; \tau)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}}$$

$$\cdot\exp\left[\frac{i}{\hbar}m\left(\frac{(q'-q)^2}{2\tau}+\frac{\tau}{2}g(q-q')-\frac{1}{24}g^2\tau^3\right)\right].$$

[30.22]

b．线性谐振子：

---

① R. P. FEYNMAN, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367(1948).

$$L=\frac{m}{2}\dot{q}^2-\frac{m\omega^2}{2}q^2,$$

$$K_C(q,q';\tau)=K(q,q';\tau)$$

$$=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega\tau}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}m\omega\frac{(q^2+q'^2)\cos\omega\tau-2qq'}{2\sin\omega\tau}\right].$$

[30.23]

c. 均匀磁场中的一个自由粒子:

$$L=\frac{m}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-m\sigma(\dot{q}_1q_2-\dot{q}_2q_1),\quad \sigma=\frac{eH}{2mc},$$

$$K_C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}';\tau)=K(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}';\tau)=\frac{m\sigma}{2\pi i\hbar\sin\sigma\tau}$$

$$\cdot\exp\left[\frac{i}{\hbar}m\sigma\left(\frac{(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')^2\cos\sigma\tau}{2\sin\sigma\tau}+q_2'q_1-q_1'q_2\right)\right].\quad [30.24]$$

为了证明上述断言,按所期望的结果,我们写下

$$\int K(q,q';\tau)\varphi(q')\mathrm{d}q'=\varphi(q)+\frac{i}{\hbar}\tau\underline{H}\varphi(q)+\tau\chi(q,\tau),$$

[30.25]

并且想要证明,

$$\lim_{\tau\to 0}\chi(q,\tau)=0.\quad [30.26]$$

这既包括断言1,又包括断言2. 在例a中,可进行精确计算. 在计算过程中,所有要点都已经能够看出. 我们有,

$$\int K(q,q';\tau)\varphi(q')\mathrm{d}q'=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}}\int\exp\left[\frac{i}{\hbar}m\left(\frac{(q'-q)^2}{2\tau}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\tau}{2}g(q+q')-\frac{1}{24}g^2\tau^3\right)\right]\varphi(q')\mathrm{d}q'$$

$$=\exp[-i\tau gq]\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}}\int\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\tau}\left(\xi^2-\tau^2g\xi-\frac{1}{12}g^2\tau^4\right)\right]$$

$$\cdot\varphi(q+\xi)\mathrm{d}\xi.\quad [30.27]$$

因为 $\xi-\frac{1}{2}g\tau^2=u$，所以方程[30.27]等于:

$$=\exp[-i\tau gq]\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}}\int\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\tau}\left(u^2+2\tau^2gq\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{12}g^2\tau^4+\frac{1}{4}g^2\tau^4\right)\right]\cdot\varphi\left(q+u+\frac{1}{2}g\tau^2\right)\mathrm{d}u.$$

若令 $u=v\sqrt{2\tau}$，上式成为:

$$=\exp[-i\tau gq]\sqrt{\frac{m}{\pi i\hbar}}\int\exp\left[\frac{i}{\hbar}m[v^2+O(\tau^2)]\right]$$

$$\cdot\varphi(q+\sqrt{2\tau}v+\frac{1}{2}g\tau^2)\mathrm{d}v.$$

因为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[iau^2]\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{i\pi}{a}}$$

$$\left(\sqrt{i}\equiv\exp\left[+i\frac{\pi}{4}\right]\right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[iau^2]u\cdot\mathrm{d}u=0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[iau^2]u^2\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(\frac{-i\pi}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

以及

$$\varphi(q+\sqrt{2\tau}v+\frac{1}{2}g\tau^2)=\varphi(q)+\sqrt{2\tau}v\varphi'(q)+\tau v^2\varphi''(q)$$

$$+O(\tau^2),$$

得到结果为:

$$\int K(q,q';\tau)\varphi(q')\mathrm{d}q'=\exp\left[-\frac{i\tau gq}{\hbar}\right]$$

$$\cdot[\varphi(q)+\tau\cdot i\hbar\varphi''(q)]+O(\tau^2)$$

$$=\varphi(q)+\frac{i\tau}{\hbar}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2}+gq\right]\varphi(q)+O(\tau^2), \qquad [30.28]$$

这就是我们想要证明的．对于例 b，计算方法完全与此相同．一般证明也可以模仿这种计算过程．我们的想法如下:

用与普通变数有些不同的变数 q 和 q'，$|q-q'|$愈小，则对固定的 τ，用自由的 S 代替 $S(q,q';\tau)$更合适．

无力的情况:

$$S_0(q,q';\tau)=m\frac{(q'-q)^2}{2\tau}.$$

一般情况:

$$S(q,q';\tau)=m\frac{(q'-q)^2}{2\tau}-\tau V(q)+S_1(q,q';\tau),$$

其中，当 τ 固定时，若 $q'\to q$，则 $S_1(q,q';\tau)\to 0$．$\partial S_1/\partial q$ 给出末动量的变化，这种变化是由于沿路线作用的力所引起的．令 $F(q)$ 表示力，则在物理学上我们断定：如果，

$$|F(q+\lambda q')|\tau \ll m\frac{|q'-q|}{\tau} \qquad [30.29]$$

(就是说，如果，在无力情况下，力的作用比动量小得多)，那么，

$$|S_1|<C\frac{\tau^2|F|}{m|q'-q|}\cdot|S_0|. \qquad [30.30]$$

如果我们限制力的增加不太快(即，如果$|F|/|q-q'|$是有界的)，那么，对于大的$|q'-q|$，$|S_1|$是一致有界的．于是，可按下述方式计算积分．存在一个 ξ_0，当$|q'-q|>\xi_0$时，上述条件得到满足，所以，如果忽略 S_1，则误差$\leqslant O(\tau^2)$．当 $\xi<\xi_0$ 时，这是不允许的，但 ξ_0 可选择为$\lim\limits_{\tau\to 0}|(1/\tau)\xi_0|=0$，所以该积分的贡献也为零，因为积分确实是有界的．这样的 ξ_0 是存在的，因为下式必须满足：

$$\frac{m}{1}F(q)\cdot\tau^2\ll\xi_0\ll\sqrt{\frac{2\tau\hbar}{m}}.$$

ξ_0 的最佳值是：

$$\xi_0=\tau^{5/4}\frac{F}{\sqrt{2m\hbar}},$$

事实上，这满足全部条件．于是证明了

$$\int K(q,q';\tau)\varphi(q')\mathrm{d}q'=\varphi(q)-\frac{\hbar}{i}\tau\underline{H}\varphi(q)+\chi(q,\tau),$$

[30.31]

其中

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\chi(q,\tau)}{\tau}=0.$$

注：1．当力与速度有关时，(例如存在磁场)也可进行同样的计算．

2．只有一个限制：

$$|F(q)|<M.|q|.$$

当 τ 小和 $|q'-q|$ 固定时，为了能够利用自由的 K_0，这条件也是必需的(也是我们感兴趣的)这可由一长为 L 的一维盒中的一个粒子这个例子看出．这对应于势：

$$V(q)=C\cdot\left(\frac{|q|}{L}\right)^{\infty},$$

于是，

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{p^2}{2m}\psi=0,\ \text{其中}\ \psi(0,t)=\psi(L,t)=0.$$

因为，

$$\psi_n(q,t)=u_n(q)\exp[-i\nu_n t],$$

我们有

$$u_n(q)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi q}{L}\right),$$

$$\nu_n=\frac{1}{\hbar}\frac{p_n^2}{2m}=\frac{\hbar\pi^2}{2mL^2}n^2.$$

核 K 可用两种方法得到：

1．利用本征函数，由熟悉的格林函数表达式得到，

$$K(q, q'; \tau) = \sum_n u_n^*(q) u_n(q') \exp[-i\nu_n \tau],$$

于是,

$$K(q, q'; \tau) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}(q-q')\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L}(q+q')\right) \right] \cdot \exp\left[-i \frac{\hbar \pi^2 \tau}{2mL^2} n^2 \right]. \quad [30.32]$$

2. 由自由粒子的核得到,

$$K_0(q, q'; \tau) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \tau}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar \tau}(q-q')^2 \right] \equiv K_0(q-q'),$$

利用镜象法,

$$K'(q, q'; \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [K_0(q-q'-2Ln) - K_0(q+q'-2Ln)].$$

当然,核K和K',两者是相等的. 这由下述最容易看出. 按照惠特克和沃森的记号①,

$$\vartheta_3(z|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp[2niz] \exp[i\pi\tau n^2]$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2nz \cdot \exp[i\pi\tau n^2],$$

而且,因为

$$\vartheta_3(z|\tau) = \vartheta_3(-z|\tau),$$

和

$$\vartheta_3(z|\tau) = (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{z^2}{i\pi\tau} \right] \cdot \vartheta_3\left(\frac{z}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau} \right) \quad [30.33]$$

---

① E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge University Press, Cambridge, 1927) 4th ed., p. 462.

成立. 于是,得到

$$K(q,q';\tau)=\frac{1}{2L}\left[\vartheta_3\left(\frac{\pi(q-q')}{2L}\middle|-\frac{\hbar\pi\tau}{2mL^2}\right)\right.$$
$$\left.-\vartheta_3\left(\frac{\pi(q+q')}{2L}\middle|-\frac{\hbar\pi\tau}{2mL^2}\right)\right].$$

和

$$K'(q,q';\tau)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}}\left\{\exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau}(q-q')^2\right]\right.$$
$$\cdot\vartheta_3\left(+\frac{mL}{\hbar\tau}(q-q')\middle|\frac{2m}{\pi\hbar\tau}L^2\right)$$
$$\left.-\exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau}(q+q')^2\right]\cdot\vartheta_3\left(+\frac{mL}{\hbar\tau}(q+q')\middle|\frac{2m}{\pi\hbar\tau}L^2\right)\right\},$$

而且,因为关系式[30.33],这两个表达式简化为相同的表式.

在这个例题中, 当 τ 小和 $|q'-q|$ 固定时, 我们看出, 对于 $|F(q)|>M\cdot|q|$, 自由核 K_0 不产生一个好的近似. 虽然如此, 但是在这里, 古典的 K_C 却是薛定谔方程的一个严格解.

注: 只当 $\mathrm{Im}\tau>0$ 时, ϑ_3 级数才一致收敛; 虽然,实际上, 当 τ 为实数时,我们给出的核并不存在. 但是,可以证明,对于充分"正常"的函数 $\varphi(q')$, 式

$$\int K(q,q';\tau)\varphi(q')\mathrm{d}q'$$

是存在的,并且由下式给出:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int K(q,q';\tau+i\varepsilon)\varphi(q')\mathrm{d}q'.$$

于是,上述所有公式都必须这样来考虑——完成积分之后,再取极限值,以消去虚数部分.

费因曼还利用这种形式导出量子电动力学. 首先, 对于一个

谐振子的强迫振动，我们能够给出一个严格解①．

$$\left.\begin{aligned} L&=\frac{1}{2}(\dot{q}^2-\omega^2q^2)+\gamma(t)\cdot q \\ H&=\frac{1}{2}(p^2+\omega^2q^2)-\gamma(t)\cdot q \end{aligned}\right\}, \qquad [30.34]$$

所以

$$\ddot{q}+\omega^2q=\dot{\gamma}(t).$$

注：这里，$K(q,t;\ q',t')$不只是与 $\tau=t-t'$ 有关；虽然如此，但是与以前的考虑没有本质的改变．

于是我们有②

$$\begin{aligned} S=\frac{\omega}{2\sin\omega\tau}\Big[&(q^2+q'^2)\cos\omega\tau-2qq' \\ &+\frac{2q}{\omega}\int_{t'}^{t}\gamma(u)\sin\omega(u-t')\mathrm{d}u+\frac{2q'}{\omega}\int_{t'}^{t} \\ &\gamma(v)\sin\omega(t-v)\mathrm{d}v \\ &+\left(-\frac{2}{\omega^2}\right)\int_{t'}^{t}\mathrm{d}v\int_{t'}^{v}\mathrm{d}u\gamma(v)\gamma(u)\sin\omega(t-v) \\ &\sin\omega(u-t')\Big]. \end{aligned} \qquad [30.35]$$

特别地，基态的对角元素是：

$$K_{00}(t,t')=\int\mathrm{d}q\int\mathrm{d}q'\psi_0^*(q,t)K(q,t;q',t')\psi_0(q',t'),$$

$$\psi_0(q,t)=\sqrt[4]{\frac{\omega}{\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\omega q^2-\frac{i}{2}\omega t\right],$$

$$\begin{aligned} K_{00}(t,t')=\exp\Big[-\frac{1}{2\omega}\cdot\int_{t'}^{t}\mathrm{d}v\int_{t'}^{v}&\mathrm{d}u\gamma(u)\gamma(v)\exp \\ &[-i\omega(v-u)]\Big]. \end{aligned} \qquad [30.36]$$

这是容易证明的③．

---

①② R. P. FEYNMAN. *Phys. Rev*, 80, 440(1950)；第 3 节.

③ 出处同上.

于是，可以消去场振子．让我们考虑一个系统——例如，一个电子——与一振子耦合．则，

$$H=H_0(x)+\frac{1}{2}(p^2+\omega^2q^2)-\gamma[x(t)]\cdot q \qquad [30.37]$$

如果我们应用K的乘积表达式[30.21]，并且找出振子停留在基态(～光子真空)的矩阵元，那么我们能够对q积分，而得到：

$$K(x,x';\tau)=\lim_{\epsilon\to 0}\int\cdots\int\prod_{\alpha=0}^{N}\sqrt{D}\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_0(x_{\alpha+1},x_\alpha;\epsilon)\right]$$
$$\cdot K_{00}(\gamma(x_1)\cdots\gamma(x_n))\,\mathrm{d}^Nx,$$

其中$\tau=(N+1)\epsilon$，$x'=x_0$，$x=x_{N+1}$，并且必须认为K_{00}是$\gamma(x)$的函数；或者说，如果把积分写成黎曼和，则必须认为K_{00}是N个$\gamma(x_\alpha)$的函数．

费因曼将这应用到无限个场振子，并且正好得到戴逊公式，当然，是必定会得到这样结果的．特别是，很好地得出了D^C函数．

正如我们在这里能够看到的那样，该公式与普通量子电动力学完全等效．然而，用这种方式，费因曼推出了戴逊公式，比戴逊的推导来得早．

补充书目

A. AKHIEZER and V. B. BEREZTETSKI, *Quautum Electrodynamics* (Wiley, New York, 1963).

J. D. BJORKEN and S. D. DRELL, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, New York, 1965).

N. N. BOGOLIUBOV and D. V, SHIRKOV. *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Interscience, New. York, 1959).

G F. Chew, *S-Matrix Theory of Strong Interactions* (Benjamin, New York, 1962).

R. P. FEYNMAN, *Quantum Electrodynamics* (Benjamin, New. York,

1962).

A. O. G. KÄLLÉN, "*Quantenelektrodynamik*" in *Encyclopedia of Physics* (S. Flügge, ed.) Vol. V. Part 1 (Springer, Berlin, 1958).

F. MANDL, *Introduction to Quantum Field Theory* (Interscience, New York, 1960).

S. SCHWEBER, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory* (Harper and Row, New York, 1961).

J. SCHWINGER, *Quantum Electrodynamics* (Dover, New York, 1958).

附录　英译本编者评注

[A-1](§1) 本书采用下列记号：具有希腊字标 $\mu=1,2,3,4$ 的量 a^μ，b_μ 表示四维矢量．按通常的求和习惯，标积写作：

$$(ab)=a^\mu b_\mu=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-a^0b_0,$$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是三维矢量，且 $a^4=ia^0$，$b_4=ib_0$．采用这种记号，上标和下标之间没有区别．我们规定，上标用于位置矢量 $x^\mu(x^0=t)$，电流 j^μ，和狄拉克矩阵 γ^μ（后者都是厄密量）；下标用于动量矢量 k_μ，量子化矢势 Φ_μ，和外（c 数）矢势 $\mathscr{A}_\mu$．此外，$\mathrm{d}^4x=\mathrm{d}^3x\mathrm{d}x_0$，$\mathrm{d}^4k=\mathrm{d}^3k\mathrm{d}k_0$．

上标 * 用来表示 c 数的复数共轭，同样表示 q 数的厄密共轭．但在下列各处有些例外：方程[3.13]中星号表示复数共轭，方程[15.10]中星号意义由[15.15]定义，在方程[15.15]以及其它地方，例如[3.17]到[3.19]中，厄密共轭由上标 + 表示．因为在各种情况下，所表示的意义是明显的，所以对原稿中这些不一致的地方不作改正．

本书采用 $\hbar=c=1$ 单位．麦克斯韦方程写成亥维赛单位，所以 $e^2/(4\pi)=\alpha\cong1/137$，$e$ 是电子电荷，α 是精细结构常数．于是，

$$\Box\Phi_\mu=-j^\mu;\quad \frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\mu}=0,$$

其中

$$\Box=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

是达朗伯算符，第二个方程是洛伦兹条件．详见本丛书第一卷《电动力学》．

[A-2](§11) 海特勒在辐射的量子理论中，通过测量规定作了解释．(W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation* (Clarendon Press, Oxford, 1954), 3rd edition, p. 319).

[A-3](§12) 自旋为$\frac{1}{2}$的粒子除了具有正常的玻尔磁子 $e/(2m)$ 以外，还具有一个反常磁矩 $\mu e/(2m)$，这种粒子除了引起正常（或“最小”）相互作用[19.2]外，还引起如下相互作用：

$$\frac{1}{2}\mu\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

与场 $F_{\mu\nu}$ 有关，而不是与势 Φ_μ 有关的这样一项相互作用称为泡利项．见泡利的文章：W. Pauli, *Rev. Mod. Phys.* **13**, 203(1941).

[A-4](§13, 14, 18) §13, §14 和 §18 大部分是 §5, §9 和 §3 的重复．这是因为，§1 至 §12 是泡利在 1950 年较短的夏季学期讲述的，而从 §13 开始，是在长的暑假之后，于 1950—1951 冬季学期讲述的．在德文原讲义中，明显地划分为第一部分和第二部分．

[A-5](§15) 这里，$\Psi(N_\lambda)$ 的意义由本征矢量 $|(N_\lambda)\rangle$ 转换为这些矢量在广义态 Ψ 中的振幅．更确切地说，应该写作：

$$\Psi=\sum_{(N_\lambda)}|(N_\lambda)\rangle c(N_\lambda).$$

于是，由辅助条件[15.14]和 §15 中方程：

对于 $i=1, 2, 3$,

$$A_i\psi(N_i)=\sqrt{N_i}\,\psi(N_i-1),$$
$$A_i^*\psi(N_i)=\sqrt{N_i+1}\,\psi(N_i+1).$$

和对于 $i=4$,

$$A_4\psi(N_4)=-i\sqrt{N_4+1}\,\psi(N_4+1),$$
$$A_4^*(N_4)=-i\sqrt{N_4}\,\psi(N_4-1).$$

得到

$$\sqrt{N_3+1}\,c(N_3+1, N_4)+\sqrt{N_4}\,c(N_3, N_4-1)=0,$$
$$\sqrt{N_3}\,c(N_3-1, N_4)+\sqrt{N_4+1}\,c(N_3, N_4+1)=0.$$

因此，

$$c(N_3, N_4)=\delta_{N_3, N_4}(-1)^{N_3}c(0, 0),$$

故因 $c(0, 0)\neq 0$,

$$|\Psi|^2=\sum_{N_3, N_4}|c(N_3, N_4)|^2=\infty.$$

§15. c中关于 $\sum_{(N_\lambda)}\psi^*(N_\lambda)\psi(N_\lambda)(-1)^{N_4}$ 在时间上保持常数的断定由下述得到：Ψ 模方的时间依赖性由下式给出，

$$|\Psi(t)|^2\equiv(\Psi^*(t), \eta\Psi(t))=(\Psi^*\exp[-iH^+t]\eta\exp[+iHt]\Psi)$$
$$=\sum_{(N_\lambda)}\sum_{(N'_\lambda)}c^*(N_\lambda)c(N'_\lambda)\langle(N_\lambda)|\exp[-iH^+t]\eta\exp[+iHt]|(N'_\lambda)\rangle.$$

由§15c中所列方程 $\eta H=H^{+}\eta$ 得,

$$\exp[-iH^{+}t]\eta=\eta\exp[-iHt].$$

根据

$$\eta A_{\lambda}^{+}=e_{\lambda}A_{\lambda}^{+}\eta;\quad e_{\lambda}=\begin{cases}+1;\ \lambda=1,2,3,\\-1;\ \lambda=4,\end{cases}$$

我们有 $[\eta,N_{\lambda}]=0$ 和

$$\langle(N_{\lambda})|\eta|(N_{\lambda}')\rangle=\delta_{(N_{\lambda})(N_{\lambda}')}(-1)^{N_4}\langle(0)|\eta|(0)\rangle.$$

因此

$$|\Psi(t)|^{2}=\sum_{(N_{\lambda})}|c(N_{\lambda})|^{2}(-1)^{N_4}\langle(0)|\eta|(0)\rangle.$$

的确,这确是常数,而且是§15.c中所指出的形式.

[A-6](§24) 这里,泡利引用了R. 格劳伯未发表的工作“关于幺正算符描述系统随时间的发展,证明它与“入”和“出”算符的关系,以及用这些算符所定义的 S 矩阵的确与戴逊所定义的 S 矩阵相同”(引自R. 格劳伯给编者的信). 这工作包括在杨振宁和费德曼的论文中(第五章参考文献1), 而且在该文脚注14中得到证实. 泡利对杨振宁提出过,格劳伯可以作为杨振宁-费德曼论文的合作者.

[A-7](§25) 当然,戴逊信守了他的诺言,参见 *Phys. Rev.* 82:428 (1951); 83:608, 1207(1951); *Proc. Roy. Soc.* (London) A 207, 395 (1951).

在1950. 11. 11. 提出的上述第一篇论文的脚注7中,戴逊感谢“W. 泡利教授和R. 约斯特博士,向他指出用这种场平均工作的必要性”并且参考了约斯特一个未发表的计算,其中“包括本系列论文所提出的许多概念”. 这说明在泡利讲授这些讲义的当时,苏黎士学派活动的重要性.

至于注1所提到的自旋为零的情况,则不可能查明究竟是否做过类似的工作.

[A-8](§29) K. 亥普乐意为本讲义作了如下注释:

1. 可以证明,重正化概念对微扰论的每一级都是正确的. 这首先由戴逊[1]提出,后来由许多作者[2]推广到数学上更为严格的各种形式.

2. 在 S 维时空的某些相互作用量子场的模型中,(如 $S=2$ 的汤川型相互作用[3], $S=3$ 的四次式 Φ^{4} 的玻色子自相互作用[4], $S=4$ 的 Φ^{3} 相互作用[5]), 可以用严格的数学方法确定正确的局部重正化哈密顿量. 其(非截止的)无

限反项正是微扰论所提出的．对于湯川型相互作用，格利姆和雅菲的结果是非常受鼓舞的：在重正化理论的海森伯图象中，时间发展是局部的，并导致量子场方程中非线性项的一种一致定义．

1. F. J. DYSON, *Phys. Rev.* 75:486, 1736(1949).

2. 参看下列著作：K. Hepp and H. Epstein in the 1970 *Les Houches Lectures*, C. de Witt *and* R. stora, editors(Gordon and Breach, New. York, 1971) 和 O. STEINMANN, *Perturbation Expansions in Axiomatic Field Theory*, Lecture Notes in Physics (Springer, Berlin, 1971).

3. J. GLIMM and A. JAFFE, *Ann, Phys.* (*N.Y*) 60, 321 (1970)和 *J. Functional Analysis*7, 323(1971).

4. J. GLIMM, *Comm. Math. Phys.* 10, 1(1968).

5. K. OSTERWALDER, ETH Thesis(Zurich, 1970).

索　引

（汉-英）